

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ

М. Р. Томаев¹, Ж. Д. Тотиева^{*,1} 

¹Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ, Россия

* **Контакт:** Жанна Дмитриевна Тотиева, jannatuaeva@inbox.ru

Представлен численный метод решения двумерной обратной динамической задачи сейсмологии для вязкоупругой изотропной среды. В качестве математической модели рассматривается система дифференциальных уравнений упругости для изотропных сред с памятью. Искомыми величинами являются смещение точек поверхности, функция памяти среды (ядро интегрального члена) и скорость распространения упругих поперечных волн в слабо горизонтально-неоднородной среде при воздействии на границу полупространства направленной мгновенной силы. Дополнительной информацией для решения обратной задачи является отклик смещения, измеренный на дневной поверхности. Метод основан на сведении обратной задачи к системе интегральных уравнений типа Вольтерра и их последовательной численной реализации. Приводится анализ результатов исследования и сравнение с аналитическим решением. Показано, что результаты находятся в удовлетворительном соответствии.

Ключевые слова: математическое моделирование, неоднородная среда с памятью, скорость распространения сейсмических волн

Цитирование: Томаев М. Р., Тотиева Ж. Д. Численное решение двумерной задачи определения скорости распространения сейсмических волн в неоднородных средах с памятью // Russian Journal of Earth Sciences. — 2023. — Т. 23. — ES4003. — DOI: <https://doi.org/10.2205/2023es000866>

Введение

Как известно, основная задача геофизики – изучение внутреннего строения Земли на основе наблюдений, осуществляемых на ее поверхности или в приповерхностном слое. Накопленные геофизические данные свидетельствуют о том, что физические параметры Земли, по существу, являются функциями трех пространственных переменных. Наиболее значительно они меняются с глубиной. Но так как непосредственные измерения физических параметров можно осуществить только в очень узком приповерхностном слое, то единственным путем изучения внутреннего строения Земли является метод, основанный на рассмотрении обратных задач. Именно геофизике обязана своим возникновением большая часть постановок обратных задач. Сферически-симметричная модель Земли является только первым приближением к ее реальному строению. Систематические отклонения в сейсмологических данных от расчетных, соответствующих сферически-симметричным моделям, стимулировали изучение более полных постановок обратных задач – двумерных и трехмерных [Романов, 1984].

Многим средам свойственна зависимость процессов деформирования от скорости и времени, которая отсутствует в уравнениях теории упругости. Такие среды проявляют как мгновенную, так и замедленную реакцию на нагрузку. Это свойство называют памятью. Другая особенность состоит в том, что в средах с памятью сочетаются способности запасать энергию подобно упругим телам и рассеивать подобно средам с вязкими

Получено: 18 июля 2023 г.

Принято: 17 августа 2023 г.

Опубликовано: 10 октября 2023 г.



© 2023. Коллектив авторов.

свойствами. Такие среды называются вязкоупругими. Более точное исследование с помощью математических методов процесса распространения электромагнитных, акустических и упругих волн в вязкоупругих средах требует учета памяти (предыдущей истории) процесса. Для электромагнитных волн это связано с явлением дисперсии волн, а для акустических и упругих волн – с наличием вязкости среды. Установлено, что при увеличении силы землетрясения грунт ведет себя не как упругое, а как вязкоупругое тело [Добрынина, 2011]. Грунты – это среды с памятью, то есть состояние таких сред в текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса. Об этом, например, указывается в работе [Вознесенский и др., 2011], в которой приводится подробный обзор исследований по выяснению природы поглощения сейсмических волн в грунтах и рассмотрены основные закономерности поглощения волн напряжений в дисперсных и полускальных грунтах. Как показано в работе [Алексеев и Добринский, 1975], неучет поглощающих свойств среды ведет к существенным искажениям при восстановлении скоростной модели среды. В математическом плане это приводит к необходимости введения в рассматриваемую математическую модель упругости дополнительного интегрального слагаемого типа оператора свертки с ядром, отвечающим за предысторию или память среды (модель Больцмана).

Впервые одномерная обратная динамическая задача для системы уравнений изотропной упругости в полупространстве без учета памяти среды была рассмотрена А. С. Алексеевым [Алексеев, 1967]. В этой работе исследован вопрос единственности решения одномерной обратной задачи, заключающейся в определении двух параметров Ламэ и плотности как функции только одной пространственной переменной (глубины). При этом один из параметров Ламэ и плотность отыскиваются по SH-волнам, а другой параметр Ламэ – по смещениям границы (дневной поверхности) при воздействии на нее мгновенной направленной силы, сосредоточенной в одной точке. В указанной работе А. С. Алексеев указал практическую значимость такого сорта задач для сейсмической разведки.

В последние годы появляется все большее количество работ в области практического применения обратных задач. Например, в работе [Абрамян и др., 2018] рассмотрены примеры деформаций земной поверхности, полученные на основе повторного нивелирования на ряде месторождений углеводородов и подземных хранилищ газа. Сформулирована обратная задача современной геодинамики недр – нахождение параметров источников аномальных деформаций на глубине по результатам измерений смещений земной поверхности. Приведены результаты решения обратных задач и показана возможность их применения для диагностики опасных зон. В работе [Мазуров, 2017] приводится обзор результатов по применению решений обратных задач в гравиразведке. Показан вариант решения обратной задачи в вулканической области по геодезическим наблюдениям с учетом увеличения внутриочагового давления при накоплении магмы в верхнем магматическом очаге вулкана.

Память среды, от которой зависит поведение сред в последующие моменты времени, не поддается непосредственному измерению, ее можно определить только теоретически. В конце прошлого столетия в связи с изучением свойств сред с памятью (в частности, новых синтетических материалов) возникло новое направление в теории обратных задач – это задачи определения ядра интегрального оператора свертки [Дурдиев, 1994; Bukhgeym, 1993; Janno u Wolfersdorf, 1997; Lorenzi u Paparoni, 1992; Lorenzi u Sinestrari, 1988]. Дальнейшее развитие исследований обратных задач определения ядер за последние десять лет отражено, например, в работах [Дурдиев, 2014; Дурдиев и Рахмонов, 2018; Дурдиев и Тотиева, 2013; Романов, 2012; 2014; Lorenzi u Romanov, 2011; Romanov u Yamamoto, 2010]. В последние годы наблюдается увеличение количества публикаций по численным расчетам ядер интегральных операторов [Дурдиев, 2020; Карчевский и Фатьянов, 2001; Vozorov, 2020; Davies u Douglas, 2019].

Отметим, что восстановление неизвестных материальных характеристик для сред с последствием, несомненно, является актуальной задачей с точки зрения приложений, так как становится возможным проводить анализ влияния памяти среды на

ее характеристики. При этом требуется одновременно (или последовательно) находить, например, скорость распространения упругих волн и ядро (функцию памяти) интегрального оператора. Для практических приложений более интересным является случай, когда характеристики среды зависят от двух и более переменных. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн. Накоплены факты, свидетельствующие о существовании внутри Земли неоднородностей по географическим координатам, или, как принято говорить, горизонтальных неоднородностей. К числу таких фактов относятся систематические отклонения в годографах волн, построенных для различных материков, от усредненного годографа, асимметрия гравитационного и электромагнитного полей. При этом отклонения от годографов, отвечающих сферически-симметричному распределению скоростей упругих волн, достаточно малы. Например, при временах пробега сейсмических волн от источника до приемника порядка 10–20 мин отклонения в годографах не превышают 5–10 с. Это позволяет предположить, что отклонения скоростного строения Земли от сферически-симметричной модели также малы [Романов, 1984]. Тем не менее эти малые флуктуации в распределении скоростей волн в средах с памятью представляют для геофизики большой интерес, так как они, возможно, помогут объяснить механизм развития земной коры, вопрос дрейфа материков и т. п. Задача определения трехмерного скоростного строения Земли с учетом явления памяти является в настоящий момент одной из актуальных задач геофизики.

Из работ, посвященных коэффициентным обратным задачам для вязкоупругих сред, в которых одновременно (либо последовательно) определяются ядра интегральных операторов, можно выделить работы [Ахматов и Тотиева, 2021; Дурдиев, 2009; Рахмонов и др., 2021; Романов, 2012; 2014; Lorenzi и др., 1994]. Например, в [Рахмонов и др., 2021] изучена модельная одномерная задача одновременного определения скорости распространения волн и ядра интегрального оператора. Показывается, что обе неизвестные функции одной переменной однозначно определяются заданием образа Фурье по пространственной переменной решения прямой задачи на границе полупространства. Устанавливается оценка устойчивости решения задачи.

Настоящее исследование относится к классу обратных задач линейной динамической упругости с памятью в трехмерном полупространстве. Его цель – численное определение скорости распространения упругих поперечных волн, распространяющихся в неоднородной среде с памятью при воздействии на границу полупространства направленной силы (шнуровой источник). Кроме того, искомой величиной в поставленной задаче является и ядро интегрального оператора свертки, моделирующего явление памяти. Предлагаемый алгоритм решения задачи основан на сведении исходной задачи к последовательному численному решению нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.

1. Постановка задачи

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ систему дифференциальных уравнений динамической упругости с памятью

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях (1.1)

$$u_i|_{t < 0} \equiv 0, \quad T_{3j}|_{x_3=+0} = -\delta_{1j} \delta(x_2) \delta'(t)/2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

где $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ – вектор смещений, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $\delta'(t)$ – производная дельта-функции Дирака; T_{ij} – тензор напряжений:

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t k(t - \tau)\sigma_{ij}[u](x, \tau)d\tau, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \operatorname{div} u. \tag{1.4}$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

Данная задача моделирует динамические процессы в упругих средах с последствием, которое представлено в виде интегрального слагаемого в тензоре напряжений (1.3) с ядром $k(t)$. Вообще говоря, ядро учитывает вязкие свойства среды, следовательно, данная модель может описывать вязкоупругие среды. В модели используется так называемый «шнуровой» источник (1.2), расположенный на оси x_1 , действующий мгновенно. Переменные (x_1, x_2) являются горизонтальными переменными, а x_3 – вертикальной переменной (ось направлена вниз). Предполагается, что плотность среды ρ и параметры Ламэ μ, λ удовлетворяют следующим условиям: $\rho = \text{const}$, $\mu = \mu(x_2, x_3)$, $\lambda = \lambda(x_2, x_3)$ являются функциями двух переменных, удовлетворяющими условиям $\rho > 0$, $\mu(x_2, x_3) > 0$, $\lambda(x_2, x_3) > 0$.

Прямая задача заключается в отыскании вектор-функции смещения $\vec{u}(\vec{x}, t)$ из системы уравнений (1.1) при соответствующих начальных и граничных условиях (1.2). При сделанных предположениях из равенств (1.1)–(1.4) следует, что компонента $u_1(\vec{x}, t) \equiv u_1(x_2, x_3, t) \neq 0$, $u_2(\vec{x}, t) \equiv u_3(\vec{x}, t) \equiv 0$ и функция $\lambda(x_2, x_3)$ не будет входить в остающиеся уравнения [Тяева, 2008].

Введем функцию $a(x_2, x_3) = \mu(x_2, x_3)/\rho$, которая есть квадрат скорости распространения упругих поперечных волн в среде с памятью. Тогда задача (1.1)–(1.4) перепишется в терминах функции u_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \sum_{j=2}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) + \int_0^t k(t - \tau) \sum_{j=2}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) (x_2, x_3, \tau) d\tau, \tag{1.5}$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0, \tag{1.6}$$

$$a(x_2, 0) \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_2, x_3, t) + \int_0^t k(t - \tau) \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_2, x_3, \tau) d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = -\delta(x_2)\delta'(t). \tag{1.7}$$

Обратная задача: определить коэффициент $a(x_2, x_3)$ и ядро интегрального оператора $k(t)$, $t > 0$, входящих в (1.1), если относительно решения задачи (1.1)–(1.3) известна дополнительная информация

$$u_1(x_2, x_3, t)|_{x_3=+0} = U(x_2, t), \quad t > 0, \tag{1.8}$$

$U(x_2, t)$ – заданная функция (результат измерений на дневной поверхности).

Предполагаем, что $a(x_2, x_3)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x_2 [Благовещенский и Федоренко, 2008; Дурдиев и Бозоров, 2013]:

$$a(x_2, x_3) = a_0 + \varepsilon x_2 a_1(x_3) + O(\varepsilon^2), \tag{1.9}$$

где ε – малый параметр. В равенстве (1.9) будем считать a_0 заданной постоянной величиной.

В данной работе разработан алгоритм определения $k(t)$ и $a_1(x_3)$ с точностью до величины $O(\epsilon^2)$, и приведена его численная реализация. Решение прямой задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде ряда по степеням ϵ

$$u_1(x_2, x_3, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j (u_1)_j(x_2, x_3, t). \tag{1.10}$$

Тогда, учитывая (1.10), имеем $U(x_2, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j U_j(x_2, t)$. Нетрудно проверить, что u_j (следовательно и U_j) – четные по x_2 при четных j и нечетные – при нечетных j . Тем самым, по известной функции $U(x_2, t)$ можно найти $U_0(x_2, t)$ и $U_1(x_2, t)$ с точностью до $O(\epsilon^2)$ [Благовещенский и Федоренко, 2008]:

$$U_0(x_2, t) = \frac{U(x_2, t) + U(-x_2, t)}{2}, \quad U_1(x_2, t) = \frac{U(x_2, t) - U(-x_2, t)}{2}.$$

Так как предполагается определение $a_1(x_3)$, $k(t)$ с точностью до поправки порядка $O(\epsilon^2)$, то, подставляя (1.9), (1.10) в (1.1), получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k(t)$ и $a_1(x_3)$:

(i) *Задача определения функций $k(t)$ и $u_0(x_2, x_3, t)$:*

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = a_0 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} \right) + \int_0^t k(t-\tau) a_0 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} \right) (x_2, x_3, \tau) d\tau, \tag{1.11}$$

$$u_0|_{t<0} \equiv 0, \quad a_0 \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_3} + \int_0^t k(t-\tau) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = -\delta(x_2) \delta'(t), \tag{1.12}$$

$$F_{x_2}[u_0](x_3, t, \nu)|_{x_3=+0} = g_0(t, \nu), \quad t > 0. \tag{1.13}$$

(ii) *Задача определения функций $a_1(x_3)$ и $u_1(x_2, x_3, t)$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) + a_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ &+ \int_0^t k(t-\tau) \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) + a_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right] d\tau, \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$u_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.15}$$

$$\left(a_1(+0) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \int_0^t k(t-\tau) \left[a_1(+0) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] d\tau \right) \Big|_{x_3=+0} = 0, \tag{1.16}$$

$$F_{x_2}[u_1](x_3, t, \nu)|_{x_3=+0} = g_1(t, \nu), \quad t > 0. \tag{1.17}$$

$F_{x_2}[u_1](x_3, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_2, x_3, t) e^{-i\nu x_2} dx_2$ – образ Фурье функции $u_1(x_2, x_3, t)$ по переменной x_2 (здесь и далее i – мнимая единица).

В работе [Тотиева, 2022] было дано теоретическое обоснование корректности постановки обратной задачи (1.1)–(1.4), (1.8). Для этого, как оказалось, достаточно задать функции $g_0(t, \nu), g_1(t, \nu)$ для одного ненулевого фиксированного значения ν .

2. Алгоритм определения функций $k(t)$ и $u_0(x, t)$ и его численная реализация

Применим к задаче (1.11)–(1.13) преобразование годографа, то есть введем новую переменную z по формуле

$$z = \frac{x_3}{\sqrt{a_0}}, \quad c_0 = \sqrt{a_0}.$$

Пусть $v(z, t, \nu) := F_{x_2}[u_0](\sqrt{a_0}z, t, \nu)$,

$$w(z, t, \nu) := \left[v(z, t, \nu) + \int_0^t k(t - \tau)v(z, \tau, \nu)d\tau \right] \exp(-k(0)t/2).$$

Тогда, с помощью резольвенты $r(t)$ ядра $k(t)$ можно выразить v :

$$v(z, t, \nu) = \exp(k(0)t/2)w(z, t, \nu) + \int_0^t r(t - \tau)\exp(k(0)\tau/2)w(z, \tau, \nu)d\tau,$$

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t - \tau)r(\tau)d\tau.$$

Относительно новых функций $w(z, t, \nu)$ и $r(t)$ получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H(\nu)w - \int_0^t h(t - \tau)w(z, \tau, \nu)d\tau, \quad z > 0, \quad t \in R, \tag{2.1}$$

$$w|_{t < 0} \equiv 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=+0} = -\frac{1}{c_0} \left(\delta'(t) - \frac{1}{2}r(0)\delta(t) \right), \tag{2.2}$$

$$w|_{z=+0} = \tilde{g}_0(t, \nu) + \int_0^t \widehat{k}(t - \tau)\tilde{g}_0(\tau, \nu)d\tau, \tag{2.3}$$

$$H(\nu) := -\nu^2 c_0^2 + \frac{r^2(0)}{4} - r'(0), \quad h(t) := r''(t)\exp(r(0)t/2),$$

$$\tilde{g}_0(t, \nu) := g_0(t, \nu)\exp(r(0)t/2), \quad \widehat{k}(t) := k(t)\exp(r(0)t/2).$$

Здесь, к примеру, r', r'' означает операцию однократного и двукратного обыкновенного дифференцирования. Частная производная по параметру будет обозначаться нижним индексом ν , например, $g_{0\nu}(t, \nu)$.

Из теории гиперболических уравнений следует, что функция $w(z, t, \nu)$ как решение прямой задачи (2.1), (2.2) обладает свойством $w \equiv 0, t < z, z > 0$ и в окрестности характеристической прямой $t = z$ имеет следующую структуру:

$$w(z, t, \nu) = \frac{1}{c_0}\delta(t - z) + \tilde{w}(z, t, \nu)\theta(t - z), \tag{2.4}$$

где $\theta(t - z)$ – функция Хевисайда, $\tilde{w}(z, t, \nu)$ – непрерывная функция в области $t > z$. Тогда структура дополнительной информации будет аналогичной:

$$g_0(t, \nu) := \frac{1}{c_0}\delta(t) + \widehat{g}_0(t, \nu)\theta(t).$$

Подставляя функцию (2.4) в уравнения (2.1)–(2.3) и приравнивая члены при одинаковых особенностях (метод выделения особенностей), находим, что функция $\tilde{w}(z, t, \nu)$ в области $t > z > 0$ удовлетворяет уравнениям ($w = \tilde{w}$ для $t > z$):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H(\nu)w - \frac{1}{c_0}h(t - z) - \int_z^t h(t - \tau)w(z, \tau, \nu)d\tau, \tag{2.5}$$

$$w|_{t=z+0} = -\frac{1}{2c_0}(r(0) - H(\nu)z) := \beta(z, \nu), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=+0} = 0, \tag{2.7}$$

$$w|_{z=0} = \widehat{g}_0(t, \nu) + \int_0^t \widehat{k}(t - \tau) \widehat{g}_0(\tau, \nu) d\tau + \frac{1}{c_0} \widehat{k}(t). \tag{2.8}$$

Таким образом, обратная задача определения $u_0(x, t)$, $k(t)$ из равенств (1.11)–(1.13) сводится к задаче определения $w(z, t, \nu)$, $\widehat{k}(t)$ из равенств (2.5)–(2.8).

В работе [Тотиева, 2022] показано, что обратная задача (2.5)–(2.8) эквивалентна замкнутой системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода в области $(z, t) \in D_T$, $D_T = \{(z, t) | 0 \leq z \leq t \leq T - z\}$ для непрерывных функций $\left[w(z, t, \nu), \frac{\partial w}{\partial t}(z, t, \nu), h(t), \widehat{k}(t), \widehat{k}'(t), \widehat{k}''(t) \right]$.

В целях численной реализации полученную в работе [Тотиева, 2022] систему интегральных уравнений удобнее представить в терминах вектор-функции $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6]$, связанной с искомыми величинами w, h, \widehat{k} следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z, t, \nu) &= w(z, t, \nu), \quad \varphi_2(z, t, \nu) = \frac{\partial w}{\partial t}(z, t, \nu) + \frac{1}{2c_0} h(t - z)z - \frac{1}{2c_0} \widehat{k}'(t - z), \\ \varphi_3(t) &= h(t) + 2\widehat{k}''(t), \quad \varphi_4(t) = \widehat{k}(t), \quad \varphi_5(t) = \widehat{k}'(t), \quad \varphi_6(t) = \widehat{k}''(t) + h(t) - r_{00} \widehat{k}(t), \end{aligned} \tag{*}$$

$r_{00} = \frac{r^2(0)}{4} - r'(0)$, где величины $r(0)$, $r'(0)$ известны и могут быть выражены через данные задачи:

$$r(0) = 2c_0 \widehat{g}_0(0, \nu), \quad r'(0) = \nu^2 c_0^2 - c_0^2 \widehat{g}_0^2(0, \nu) + 2c_0 \widehat{g}_0'(0, \nu).$$

Тогда в терминах φ систему интегральных уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{01} \\ &+ \int_z^t \left[\varphi_2(z, \tau, \nu) - \frac{1}{2c_0} z(2\varphi_6(\tau - z) - \varphi_3(\tau - z) + 2r_{00}\varphi_4(\tau - z)) + \frac{1}{2c_0} \varphi_5(\tau - z) \right] d\tau, \tag{2.9} \\ \varphi_2 &= \varphi_{02} + \frac{1}{2} \int_0^{t-z} \varphi_5(t - z - \tau) \widehat{g}_0(\tau, \nu) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^z \left[H(\nu) \varphi_1(\xi, t - z + \xi, \nu) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-z} (2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau)) \varphi_1(\xi, t - z + \xi - \tau, \nu) d\tau \right] d\xi \\ &+ \frac{1}{2} \int_z^{\frac{t+z}{2}} \left[H(\nu) \varphi_1(\xi, t + z - \xi, \nu) - \frac{1}{c_0} (2\varphi_6(t + z - 2\xi) - \varphi_3(t + z - 2\xi) + 2r_{00}\varphi_4(t + z - 2\xi)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t+z-2\xi} (2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau)) \varphi_1(\xi, t + z - \xi - \tau, \nu) d\tau \right] d\xi, \tag{2.10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_{03} - 2c_0 \int_0^t (\varphi_3(t - \tau) - \varphi_6(t - \tau) - r_{00}\varphi_4(t - \tau)) \widehat{g}_0(\tau, \nu) d\tau \\ &\quad - c_0 \int_0^t (2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau)) \beta_t' \left(\frac{t - \tau}{2}, \nu \right) d\tau \\ &\quad + 2c_0 \int_0^{t/2} \left[H(\nu) \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t - \xi, \nu) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-2\xi} (2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau)) \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t - \xi - \tau, \nu) d\tau \right] d\xi, \tag{2.11} \end{aligned}$$

$$\varphi_4 = \varphi_{04} + \int_0^t (t - \tau)(\varphi_3(t - \tau) - \varphi_6(t - \tau) - r_{00}\varphi_4(t - \tau)) d\tau, \tag{2.12}$$

$$\varphi_5 = \varphi_{05} + \int_0^t (\varphi_3(t-\tau) - \varphi_6(t-\tau) - r_{00}\varphi_4(t-\tau)) d\tau, \tag{2.13}$$

$$\varphi_6 = \varphi_{06} - \int_0^t (2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau))\varphi_6(\tau) d\tau, \tag{2.14}$$

здесь $\varphi_{01}(z, \nu) = \beta(z, \nu)$, $\varphi_{02}(z, t, \nu) = \frac{1}{2}(\widetilde{g}_0'(t-z, \nu) - r(0)\widehat{g}_0(t-z, \nu)) + \frac{1}{4c_0}H(\nu)$,

$$\varphi_{03}(t, \nu) = -2c_0 \left[\widetilde{g}_0''(t, \nu) - r(0)\widetilde{g}_0'(t, \nu) + r_{01}\widehat{g}_0(t, \nu) - \frac{1}{2}H(\nu)\beta\left(\frac{t}{2}, \nu\right) \right],$$

$$\varphi_{04}(t) = -r(0) + r_{01}t, \quad \varphi_{05}(t) = r_{01}, \quad \varphi_{06}(t) = 0, \quad r_{01} = \frac{r_0^2(0)}{2} - r_0'(0).$$

В системе интегральных уравнений (2.9)–(2.14) вместо величины $\frac{\partial w}{\partial t}(z, t, \nu)$ подразумевается значение, которое легко выводится из (*):

$$\frac{\partial w}{\partial t}(z, t, \nu) = \varphi_2(z, t, \nu) - \frac{z}{2c_0}(2\varphi_6(t-z) - \varphi_3(t-z) + 2r_{00}\varphi_4(t-z)) + \frac{1}{2c_0}\varphi_5(t-z).$$

2.1. Численная реализация алгоритма

В области D_T вводится равномерная сетка с шагом $\Delta t = T/(2N)$, N – количество точек разбиения отрезка $[0, T/2]$. Введем обозначения:

$$z_n = \Delta t(n-1), \quad t_j = \Delta t(j-1), \quad \varphi_{1,2}^{n,j} = \varphi_{1,2}(z_n, t_j), \quad \varphi_{3,4,5,6}^j = \varphi_{3,4,5,6}(t_j),$$

$$\varphi_{01}^i = \varphi_{01}(z_n, \nu), \quad \varphi_{02}^{n,j} = \varphi_{02}(z_n, t_j, \nu), \quad \varphi_{03,04}^j = \varphi_{03,04}(t_j, \nu), \quad n = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, 2N+1}.$$

Следующие значения узлов сетки считаются известными:

$$\varphi_1^{1,1} = \varphi_{01}(0, \nu), \quad \varphi_2^{1,1} = \varphi_{02}(0, 0, \nu), \quad \varphi_3^1 = \varphi_{03}(0, \nu), \quad \varphi_4^1 = -r(0), \quad \varphi_5^1 = r_{01}, \quad \varphi_6^1 = 0,$$

значения на прямой $t = z$ также заданы:

$$\varphi_1^{n,n,\nu} = \varphi_{01}(z_n, \nu), \quad \varphi_2^{n,n} = \varphi_{02}(z_n, z_n) + \frac{1}{2}H(\nu) \int_0^{z_n} \beta(\xi) d\xi, \quad n = \overline{1, N}.$$

Вычислительный алгоритм заключается в следующем. Интегралы заменяются на квадратурные формулы и вычисляются с помощью аппроксимаций формулами прямоугольников, а сами интегральные уравнения после введения равномерной сетки превращаются в рекуррентные формулы. Например, для первого уравнения расчетная формула будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi_1^{n,j+1} = \varphi_{01}^n + \Delta t \sum_{k=n}^j \left[\varphi_2^{n,k} - \frac{n\Delta t}{2c_0}(-\varphi_3^{k+1-n} + 2\varphi_6^{k+1-n} + 2r_{00}\varphi_4^{k+1-n}) + \frac{1}{2c_0}\varphi_5^{k+1-n} \right].$$

Во втором интегральном уравнении считаем узел $\varphi_1^{n,j+1}$ уже известным:

$$\begin{aligned} \varphi_2^{n,j+1} = \varphi_{02}^{n,j+1} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=n}^j \varphi_5^{j-k+1} g((k-n)\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{l=1}^n \left[H(\nu)\varphi_1^{l,j+1-n+l} \right. \\ \left. - \Delta t \sum_{k=1}^{j+1-n} (-\varphi_3^k + 2\varphi_6^k + r_{01}\varphi_4^k)\varphi_1^{l,j+1-n+l-k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{l=n}^{[(n+j)/2]} \left[H(\nu) \varphi_1^{l,j+1+n-l} - \frac{1}{c_0(+0)} \left(-\varphi_3^{n+j+1-2l} + 2\varphi_6^{n+j+1-2l} + 2r_{00}\varphi_4^{n+j+1-2l} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \Delta t \sum_{k=1}^{j+1+n-2l} \left(-\varphi_3^k + 2\varphi_6^k + 2r_{00}\varphi_4^k \right) \varphi_1^{l,j+1+n-l-k} \right].
 \end{aligned}$$

Остальные рекуррентные формулы для (2.11)–(2.14) строятся аналогичным образом.

3. Алгоритм определения функций $a_1(x_3)$ и $u_1(x, t)$

Далее для краткой записи определим билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L[k(t), u(\cdot, t)] = u(\cdot, t) + \int_0^t k(t - \tau)u(\cdot, \tau)d\tau.$$

В равенствах (1.14)–(1.17) перейдем от функций $u_0(x_2, x_3, t)$ и $u_1(x_2, x_3, t)$ к их образам Фурье $\tilde{u}_j(x_3, t, \nu) := F_{x_2}[u_j](x_3, t, \nu)$, $j = 0, 1$. Тогда обратная задача (1.14)–(1.17) в терминах функции \tilde{u}_1 переписется в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t^2} = L \left[k, a_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_3^2} - \nu^2 a_0 \tilde{u}_1 \right] + L \left[k, i \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_1(x_3) \frac{\partial \tilde{u}_{0\nu}}{\partial x_3} \right) - i\nu a_1(x_3) \tilde{u}_0 - i\nu^2 a_1(x_3) \tilde{u}_{0\nu} \right], \quad (3.1)$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0, \quad L \left[k, ia_1(+0) \frac{\partial \tilde{u}_{0\nu}}{\partial x_3} + a_0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = 0, \quad (3.2)$$

$$\tilde{u}_1(0, t, \nu) = g_1(t, \nu), \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Пусть $V(z, t, \nu) = L[k, \tilde{u}_1(\sqrt{a_0}z, t, \nu)] \exp(r(0)t/2)$. Принимая во внимание равенство (2.4) и свойства решения задачи разд. 2 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_{0\nu}$, можно переписать задачу (3.1)–(3.3) в следующем виде для $z > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + H(\nu)V - \int_z^t h(t - \tau)V(z, \tau, \nu)d\tau - i\nu c_1(z) \left(\frac{1}{c_0} \delta(t - z) + w(z, t, \nu)\theta(t - z) \right) \\
 &\quad - i\nu^2 c_1(z)w_\nu(z, t, \nu) + \frac{i}{c_0^2} c_1'(z) \frac{\partial w_\nu}{\partial z} + \frac{i}{c_0^2} c_1(z) \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2},
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$V|_{t < z} \equiv 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=+0} = 0, \quad (3.5)$$

$$V|_{t=z} = 0, \quad V|_{z=0} = L[\widehat{k}, \widehat{g}_1(t, \nu)], \quad (3.6)$$

где

$$c_1(z) = a_1(\sqrt{a_0}z), \quad \widehat{g}_1(t, \nu) = g_1(t, \nu) \exp(r(0)t/2).$$

Таким образом, мы свели обратную задачу определения $a_1(x_3)$, $u_1(x, t)$ из равенств (1.14)–(1.17) к задаче определения $c_1(z)$, $V(z, t, \nu)$ из равенств (3.4)–(3.6).

Можно показать, используя формулу Даламбера и условия (3.5), (3.6), что начально-краевая задача (3.4)–(3.6) эквивалентна следующей системе интегральных

уравнений Вольтерра второго рода в области D_T относительно $V(z, t, \nu)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(z, t, \nu)$, $c_1(z)$, $c'_1(z)$:

$$V(z, t, \nu) = \frac{1}{2} \left(L[\widehat{k}, \widehat{g}_1(t-z, \nu)] + L[\widehat{k}, \widehat{g}_1(t+z, \nu)] \right) - \frac{i\nu}{2c_0} \int_{\frac{t-z}{2}}^{\frac{t+z}{2}} c_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \left\{ H(\nu)V(\xi, \tau, \nu) - c_1(\xi)N(\xi, \tau, \nu) + \frac{i}{c_0^2} c'_1(\xi) \frac{\partial w_\nu}{\partial z}(\xi, \tau, \nu) - \int_\xi^\tau h(\tau-\eta)V(\xi, \eta, \nu) d\eta \right\} d\tau d\xi := F[V, c_1, c'_1], \tag{3.7}$$

$$c'_1(z) = \frac{1}{M(z)} L[\widehat{k}, \widehat{g}'_{1\nu}(2z, \nu)]' - \frac{N(z, z, \nu)}{2M(z)} c_1(z) + \frac{1}{M(z)} \int_0^z \left\{ H(\nu) \frac{\partial V}{\partial t}(\xi, t-\xi, \nu) - c_1(\xi) \frac{\partial N}{\partial t}(\xi, t-\xi, \nu) + \frac{i}{c_0^2} c'_1(\xi) \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial t \partial z}(\xi, \tau, \nu) - \int_0^{2z-2\xi} h(\tau) \frac{\partial V}{\partial t}(\xi, 2z-\xi-\tau, \nu) d\tau \right\} d\xi, \tag{3.8}$$

$$c_1(z) = c_1(0) + \int_0^z c'_1(\xi) d\xi, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(z, t, \nu) = \frac{\partial}{\partial t} F[V, c_1, c'_1], \tag{3.10}$$

где $M(z) := i\nu \left[1 + \frac{1}{4c_0} \right] \neq 0$ при выполнении условия $\nu \neq 0$,

$$N(\xi, \tau, \nu) := i \left[\nu w(\xi, \tau, \nu) + \nu^2 w_\nu - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}(\xi, \tau, \nu) \right], \quad c_1(0) = \frac{2c_0}{i\nu} \widetilde{g}'_1(0, \nu).$$

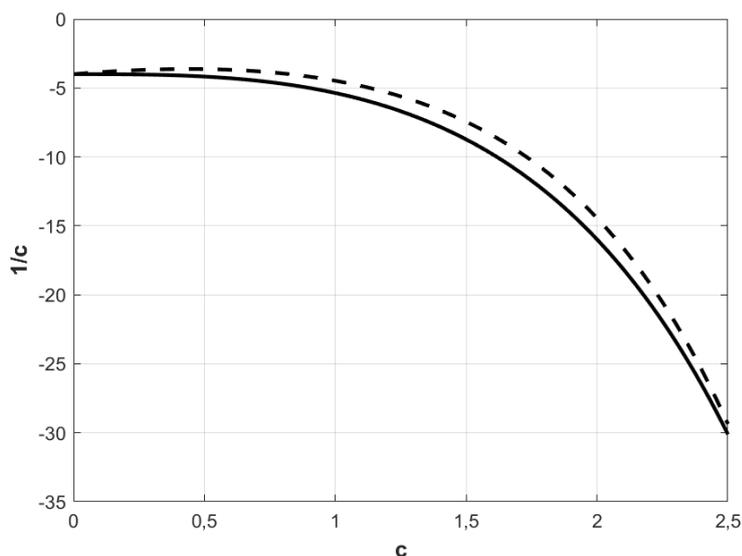


Рис. 1. Функция памяти $k(t)$ (пунктирная линия – численное решение, сплошная линия – аналитическое решение).

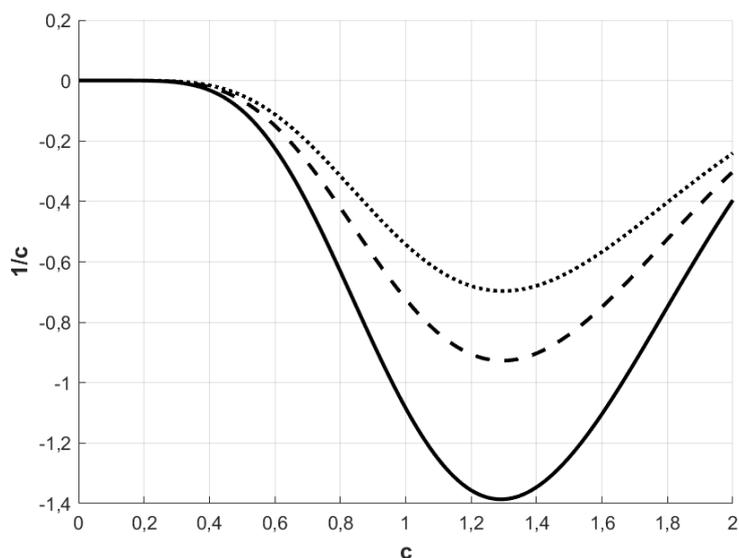


Рис. 2. Функция памяти $k(t)$ при $\omega = 1$ (сплошная линия – $c_0 = 100$ м/с, пунктирная линия – $c_0 = 150$ м/с и точечная линия – $c_0 = 200$ м/с).

Уравнения (3.9), (3.10) очевидны и используются для замыкания системы (3.7), (3.8). Переходя к дискретному аналогу интегральной системы аналогично тому, как это было сделано в разд. 2, можно рассчитать компоненту $c_1(z)$.

4. Анализ численных результатов

Результаты численных расчетов были получены для следующих входных данных: отклик $U(x_2, t) = e^{-(x_2-1)^2} f(t)$, $g_0(t, \nu) = f(t)\sqrt{2}e^{-\frac{\nu^2}{4}} \cos \nu$, $g_1(t, \nu) = f(t)i\sqrt{2}e^{-\frac{\nu^2}{4}} \sin \nu$.

Для анализа точности вычислений представленного алгоритма и, в частности, функции $k(t) \equiv \varphi_4(t)$, были проведены тестовые расчеты (рис. 1). Для сравнения представлена функция $k(t)$ (пунктирная линия), рассчитанная из системы при таких входных параметрах ($\nu = 1$, $c_0 = 1$ м/с, $f(t) \equiv t^2$), что возможно получение аналитиче-

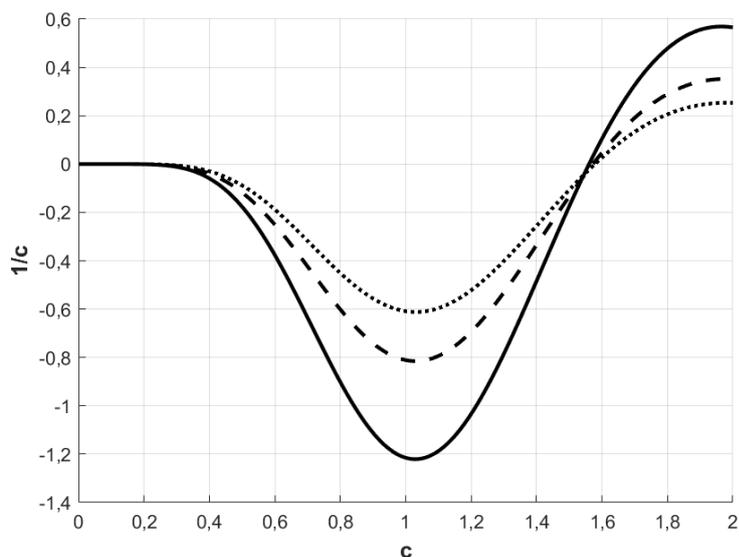


Рис. 3. Функция памяти $k(t)$ при $\omega = 2$ (сплошная линия – $c_0 = 100$ м/с, пунктирная линия – $c_0 = 150$ м/с и точечная линия – $c_0 = 200$ м/с).

ского решения системы интегральных уравнений [Durdiev u Totieva, 2023] (сплошная линия), а именно,

$$k(t) = -\frac{4}{5}e^{3^{1/3}t} + e^{-\frac{3^{1/3}}{2}t} \left(-\frac{16}{5} \cos\left(\frac{3^{1/6}t}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{5} \sin\left(\frac{3^{1/6}t}{2}\right) \right).$$

Как видно из рис. 1, аналитическое решение и решение, рассчитанное по квадратным формулам, находятся в хорошем соответствии. Относительная погрешность разности значений двух представленных графиков не превышает 10%.

На рис. 2, 3, 4 приведены результаты расчетов функции $k(t)$ при $f(t) = t^6 e^{-5t} \sin(\omega t)$ и $\omega = 1, 2, 3$ соответственно. Здесь сплошная линия соответствует значению $c_0 = 100$ м/с, пунктирная линия – $c_0 = 150$ м/с и точечная линия – $c_0 = 200$ м/с.

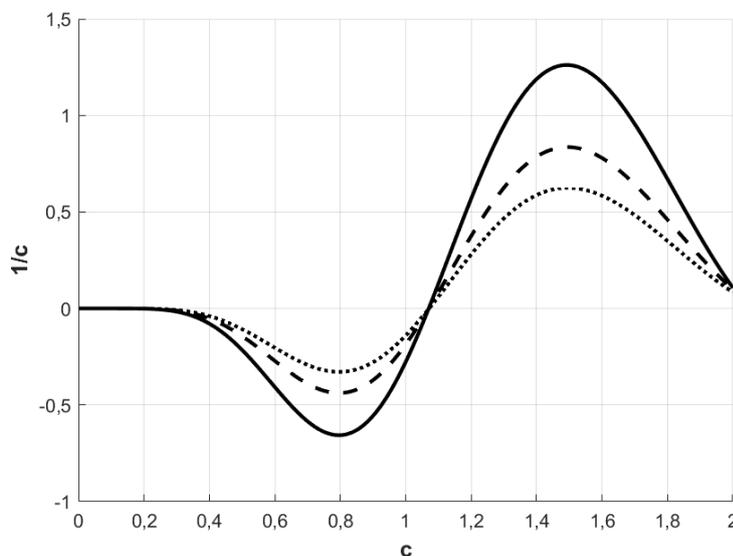


Рис. 4. Функция памяти $k(t)$ при $\omega = 3$ (сплошная линия – $c_0 = 100$ м/с, пунктирная линия – $c_0 = 150$ м/с и точечная линия – $c_0 = 200$ м/с).

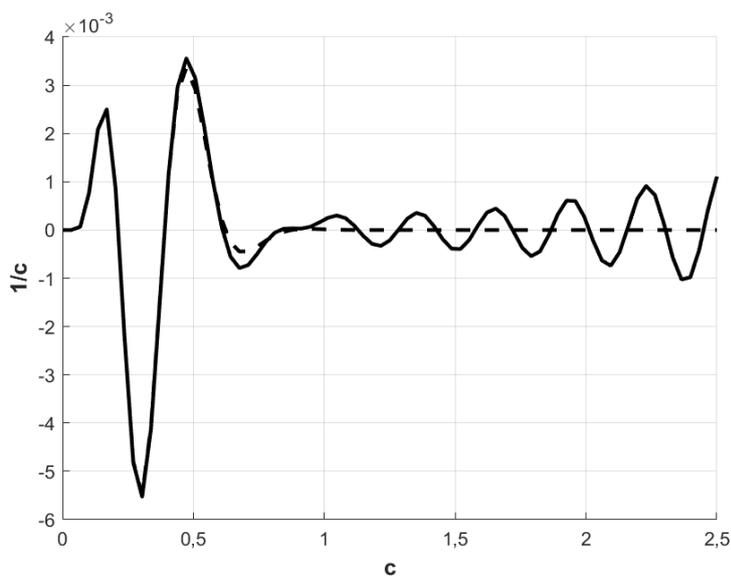


Рис. 5. Частота $c_1(z)$ (сплошная линия соответствует $k(t) \neq 0$, пунктирная линия – $k(t) = 0$).

Как видно из рис. 2, 3, 4, с увеличением частоты значения функции памяти увеличиваются, причем по-разному в зависимости от скорости волн. С увеличением скорости поперечных волн, наоборот, значения функции памяти уменьшаются. То есть при преобладании вязких свойств последствие среды усиливается.

На рис. 5 изображен график функции $c_1(z)$ с учетом памяти (сплошная линия) и без (пунктирная линия). Как видно, при учете памяти среды наблюдаются колебания частоты (сплошная линия), что позволяет более точно прогнозировать поведение вязкоупругих сред.

5. Заключение

В работе рассмотрена обратная задача численного определения памяти (ядра интегрального оператора свертки) вязкоупругой среды в изотропном полупространстве и скорости распространения поперечных волн при воздействии на границу полупространства направленной мгновенной силы, представляющей собой шнуровой источник. В качестве дополнительной информации задается отклик на заданное воздействие поля смещений на границе полупространства. Анализ численных результатов показал, что ядро интегрального оператора (функция памяти) чувствительно к средней скорости распространения упругих поперечных волн в среде, что согласуется с тем, что вязкоупругие свойства среды проявляются в средах с небольшими скоростями поперечных волн. Также наблюдается усиление последствие с увеличением временного интервала. При изменении частоты отклика в графике функции $k(t)$ меняется количество локальных экстремумов. Искомая частота $c_1(z)$ при отсутствии последствие затухает после 1 секунды, тогда как при ненулевой памяти наблюдаются колебания, которые увеличиваются с течением времени. Учет последствие среды позволяет точнее описывать динамику вязкоупругих сред при заданных воздействиях, что актуально, в частности, при предварительной оценке с целью выполнения сейсморазведочных работ. Таким образом, результаты данного исследования позволяют решить сейсмическую задачу определения скорости (зависящей от двух пространственных переменных) распространения волн в вязкоупругой горизонтально-неоднородной геологической среде по исходным сейсмическим данным.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-27-00264, <https://rscf.ru/project/23-27-00264/>.

Список литературы

- Абрамян Г. О., Кузьмин Д. К., Кузьмин Ю. О. Решение обратных задач современной геодинамики недр на месторождениях углеводородов и подземных хранилищах газа // Маркшейдерский вестник. — 2018. — Т. 4(125). — С. 52–61.
- Алексеев А. С. Обратные динамические задачи сеймики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. — Москва : Наука, 1967. — С. 9–84.
- Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сеймики // Математические проблемы геофизики. Т. 6. — Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1975. — С. 7–53.
- Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д. Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Т. 23, № 4. — С. 15–27. — DOI: [10.46698/14464-6098-4749-m](https://doi.org/10.46698/14464-6098-4749-m).
- Благовещенский А. С., Федоренко Д. А. Обратная задача для уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2008. — Т. 35, № 3. — С. 81–99. — DOI: [10.1007/s10958-008-9221-1](https://doi.org/10.1007/s10958-008-9221-1).
- Вознесенский Е. А., Кушнарева Е. С., Фуникова В. В. Природа и закономерности поглощения волн напряжений в грунтах // Вестник Московского университета. Серия 4. Геология. — 2011. — Т. 4. — С. 39–47.
- Добрынина А. А. Добротность литосферы и очаговые параметры землетрясений Байкальской рифтовой системы : 07.00.02 / Добрынина А. А. — Новосибирск, 2011.
- Дурдиев Д. К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сибирский математический журнал. — 1994. — Т. 35, № 3. — С. 574–582.

- Дурдиев Д. К. Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 28–40.
- Дурдиев Д. К. Обратные задачи для сред с последействием. — Ташкент : ТУРОН - ИКБОЛ, 2014. — С. 240.
- Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневосточный математический журнал. — 2013. — Т. 13, № 2. — С. 209–221.
- Дурдиев Д. К., Рахронов А. А. Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теоретическая и математическая физика. — 2018. — Т. 195, № 3. — С. 491–506.
- Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 2. — С. 72–82.
- Дурдиев У. Д. Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — С. 179–189. — DOI: [10.33048/semi.2020.17.013](https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013).
- Карчевский А. Л., Фатьянов А. Г. Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2001. — Т. 4, № 3. — С. 259–268.
- Мазуров Б. Т. Геодинамические системы (решение обратных задач геодезическими методами) // Вестник Сибирского государственного университета геосистем и геотехнологий. — 2017. — Т. 22, № 1. — С. 5–17.
- Рахронов А. А., Дурдиев У. Д., Бозоров З. Р. Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 207, № 1. — С. 112–132. — DOI: [10.4213/tmf10035](https://doi.org/10.4213/tmf10035).
- Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — Москва : Наука, 1984. — С. 262.
- Романов В. Г. Двумерная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения электродинамики // Труды ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 273–280.
- Романов В. Г. Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 3. — С. 617–626.
- Тотиева Ж. Д. Двумерная коэффициентная обратная задача для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Теоретическая и математическая физика. — 2022. — Т. 213, № 2. — С. 193–213. — DOI: [10.4213/tmf10311](https://doi.org/10.4213/tmf10311).
- Туаева Ж. Д. Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Сборник докладов VI Международной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". — 2008.
- Bozorov Z. R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. — 2020. — Vol. 8, no. 2. — P. 28–40. — DOI: [10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40](https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40).
- Bukhgeym A. L. Inverse problems of memory reconstruction // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 1993. — Vol. 1, no. 3. — DOI: [10.1515/jiip.1993.1.3.193](https://doi.org/10.1515/jiip.1993.1.3.193).
- Davies A. R., Douglas R. J. A kernel approach to deconvolution of the complex modulus in linear viscoelasticity // Inverse Problems. — 2019. — Vol. 36, no. 1. — P. 015001. — DOI: [10.1088/1361-6420/ab2944](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab2944).
- Durdiev D. K., Totieva Z. D. Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. — Springer Nature Singapore, 2023. — P. 368. — DOI: [10.1007/978-981-99-2260-4](https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4).
- Janno J., Wolfersdorf L. V. Inverse Problems for Identification of Memory Kernels in Viscoelasticity // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 1997. — Vol. 20, no. 4. — P. 291–314. — DOI: [10.1002/\(sici\)1099-1476\(19970310\)20:4<291::aid-mma860>3.0.co;2-w](https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1476(19970310)20:4<291::aid-mma860>3.0.co;2-w).
- Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. — 1992. — Vol. 87. — P. 105–138.
- Lorenzi A., Romanov V. G. Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // Inverse Problems & Imaging. — 2011. — Vol. 5, no. 2. — P. 431–464. — DOI: [10.3934/ipi.2011.5.431](https://doi.org/10.3934/ipi.2011.5.431).
- Lorenzi A., Sinestrari E. An inverse problem in the theory of materials with memory // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1988. — Vol. 12, no. 12. — P. 1317–1335. — DOI: [10.1016/0362-546x\(88\)90080-6](https://doi.org/10.1016/0362-546x(88)90080-6).
- Lorenzi A., Ulekova Z. S., Yakhno V. G. An inverse problem in viscoelasticity // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 1994. — Vol. 2, no. 2. — DOI: [10.1515/jiip.1994.2.2.131](https://doi.org/10.1515/jiip.1994.2.2.131).
- Romanov V., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Applicable Analysis. — 2010. — Vol. 89, no. 3. — P. 377–390. — DOI: [10.1080/00036810903518975](https://doi.org/10.1080/00036810903518975).

NUMERICAL SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF DETERMINING THE PROPAGATION VELOCITY OF SEISMIC WAVES IN INHOMOGENEOUS MEDIUM OF MEMORY TYPE

M. R. Tomaev¹, Zh. D. Totieva^{**1} 

¹North Ossetian State University, Vladikavkaz, Russia

****Correspondence to:** Zh. D. Totieva, jannatuaeva@inbox.ru

The numerical method for two-dimensional inverse dynamic seismic problem for a viscoelastic isotropic medium is presented. The system of differential equations of elasticity for isotropic medium of memory type is considered as a mathematical model. The unknown values are the displacement, the memory function of the medium (the kernel of the integral term) and the propagation velocity of elastic waves in a weakly horizontally inhomogeneous medium. Additional information for the inverse problem is the response displacement measured on the surface. The method is based on reducing the inverse problem to a system of Volterra-type integral equations and their sequential numerical implementation. The results of the study are analyzed and compared with the analytical solution. It is shown that the results are in satisfactory agreement.

Received: 18 July 2023

Accepted: 17 August 2023

Published: 10 October 2023

Keywords: mathematical modeling, inhomogeneous viscoelastic medium of memory type, velocity of seismic waves propagation



© 2023. The Authors.

Citation: Tomaev, M. R., Zh. D. Totieva (2023), Numerical Solution of a Two-Dimensional Problem of Determining the Propagation Velocity of Seismic Waves in Inhomogeneous Medium of Memory Type, *Russ. J. Earth. Sci.*, 23, ES4003, <https://doi.org/10.2205/2023ES000866>

References

- Abramyan G. O., Kuzmin D. K., Kuzmin Y. O. Solution of inverse problems of recent geodynamics of subsoil in hydrocarbon fields and underground gas storage facilities // *Mine Surveying Bulletin*. — 2018. — Vol. 4(125). — P. 52–61.
- Akhmatov Z. A., Totieva Z. D. Quasi-Two-Dimensional Coefficient Inverse Problem for the Wave Equation in a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium with Memory // *Vladikavkaz Mathematical Journal*. — 2021. — Vol. 23, no. 4. — P. 15–27. — DOI: [10.46698/14464-6098-4749-m](https://doi.org/10.46698/14464-6098-4749-m).
- Alekseev A. S. Inverse dynamic problems of seismics // *Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical Data*. — Moscow : Nauka, 1967. — P. 9–84.
- Alekseev A. S., Dobrinsky V. I. Some issues of practical use of inverse dynamic seismic problems // *Mathematical problems of geophysics*. Vol. 6. — Novosibirsk : Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1975. — P. 7–53.
- Blagoveshchenskii A. S., Fedorenko D. A. The inverse problem for an acoustic equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium // *Notes of scientific seminars POMI*. — 2008. — Vol. 35, no. 3. — P. 81–99. — DOI: [10.1007/s10958-008-9221-1](https://doi.org/10.1007/s10958-008-9221-1).
- Bozorov Z. R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. — 2020. — Vol. 8, no. 2. — P. 28–40. — DOI: [10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40](https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40).
- Bukhgeym A. L. Inverse problems of memory reconstruction // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 1993. — Vol. 1, no. 3. — DOI: [10.1515/jiip.1993.1.3.193](https://doi.org/10.1515/jiip.1993.1.3.193).
- Davies A. R., Douglas R. J. A kernel approach to deconvolution of the complex modulus in linear viscoelasticity // *Inverse Problems*. — 2019. — Vol. 36, no. 1. — P. 015001. — DOI: [10.1088/1361-6420/ab2944](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab2944).

- Dobrynina A. A. Quality factor of the lithosphere and focal parameters of earthquakes in the Baikal rift system : 07.00.02 / Dobrynina A. A. — Novosibirsk, 2011.
- Durdiev D. K. A multidimensional inverse problem for an equation with memory // *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*. — 1994. — Vol. 35, no. 3. — P. 574–582.
- Durdiev D. K. An Inverse Problem for Determining Two Coefficients in an Integrodifferential Wave Equation // *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*. — 2009. — Vol. 12, no. 3. — P. 28–40.
- Durdiev D. K. Inverse Problems for Media with Aftereffects. — Tashkent : Turon-iqbol, 2014. — P. 240.
- Durdiev D. K., Bozorov Z. R. A problem of determining the kernel of integrodifferential wave equation with weak horizontal properties // *Far Eastern Mathematical Journal*. — 2013. — Vol. 13, no. 2. — P. 209–221.
- Durdiev D. K., Rakhmonov A. A. Inverse problem for a system of integro-differential equations of SH waves in a viscoelastic porous medium: global solvability // *Theoretical and mathematical physics*. — 2018. — Vol. 195, no. 3. — P. 491–506.
- Durdiev D. K., Totieva Z. D. Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. — Springer Nature Singapore, 2023. — P. 368. — DOI: [10.1007/978-981-99-2260-4](https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4).
- Durdiev D. K., Totieva Z. D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type // *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*. — 2013. — Vol. 16, no. 2. — P. 72–82.
- Durdiev U. D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya*. — 2020. — Vol. 17. — P. 179–189. — DOI: [10.33048/semi.2020.17.013](https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013).
- Janno J., Wolfersdorf L. V. Inverse Problems for Identification of Memory Kernels in Viscoelasticity // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 1997. — Vol. 20, no. 4. — P. 291–314. — DOI: [10.1002/\(sici\)1099-1476\(19970310\)20:4<291::aid-mma860>3.0.co;2-w](https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1476(19970310)20:4<291::aid-mma860>3.0.co;2-w).
- Karchevsky A. L., Fatyanov A. G. Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium // *Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki*. — 2001. — Vol. 4, no. 3. — P. 259–268.
- Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*. — 1992. — Vol. 87. — P. 105–138.
- Lorenzi A., Romanov V. G. Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // *Inverse Problems & Imaging*. — 2011. — Vol. 5, no. 2. — P. 431–464. — DOI: [10.3934/ipi.2011.5.431](https://doi.org/10.3934/ipi.2011.5.431).
- Lorenzi A., Sinestrari E. An inverse problem in the theory of materials with memory // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. — 1988. — Vol. 12, no. 12. — P. 1317–1335. — DOI: [10.1016/0362-546x\(88\)90080-6](https://doi.org/10.1016/0362-546x(88)90080-6).
- Lorenzi A., Ulekova Z. S., Yakhno V. G. An inverse problem in viscoelasticity // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 1994. — Vol. 2, no. 2. — DOI: [10.1515/jiip.1994.2.2.131](https://doi.org/10.1515/jiip.1994.2.2.131).
- Mazurov B. T. Geodynamical system (the solution of inverse problems geodetic methods) // *Vestnik of the Siberian State University of Geosystems and Technologies*. — 2017. — Vol. 22, no. 1. — P. 5–17.
- Rakhmonov A. A., Durdiev U. D., Bozorov Z. R. Problem of determining the speed of sound and the memory of an anisotropic medium // *Theoretical and mathematical physics*. — 2021. — Vol. 207, no. 1. — P. 112–132. — DOI: [10.4213/tmf10035](https://doi.org/10.4213/tmf10035).
- Romanov V. G. Inverse problems of mathematical physics. — Moscow : Nauka, 1984. — P. 262.
- Romanov V. G. A two-dimensional inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // *Proceedings of the Institute of Mechanics and Mathematics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. — 2012. — Vol. 18, no. 1. — P. 273–280.
- Romanov V. G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*. — 2014. — Vol. 55, no. 3. — P. 617–626.
- Romanov V., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // *Applicable Analysis*. — 2010. — Vol. 89, no. 3. — P. 377–390. — DOI: [10.1080/00036810903518975](https://doi.org/10.1080/00036810903518975).
- Totieva Z. D. Coefficient reconstruction problem for the two-dimensional viscoelasticity equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2022. — Vol. 213, no. 2. — P. 193–213. — DOI: [10.4213/tmf10311](https://doi.org/10.4213/tmf10311).
- Tuaeva Z. D. Multidimensional mathematical seismic model with memory // *Research on differential equations and mathematical modeling. Collection of reports of the VI International Conference "Ordinal Analysis and Related Issues of Mathematical Modeling"*. — 2008.
- Voznesenskii E. A., Kushnareva E. S., Funikova V. V. Nature and patterns of stress wave absorption in soils // *Moscow University Bulletin. Series 4. Geology*. — 2011. — Vol. 4. — P. 39–47.