


АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ
И ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ЛОКАЛЬНЫХ
И НЕЛОКАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ВОЗМУЩЕНИЙИ. Ю. Владимиров¹ ¹Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия* **Контакт:** И. Ю. Владимиров, iyuvladimirov@rambler.ru

Исследованы дальние поля внутренних гравитационных волн от радиально-симметричного начального возмущения линий равной плотности в слое стратифицированной среды конечной толщины, а также дальние поля поверхностных волн от импульсного источника в однородной жидкости конечной глубины. Получены интегральные представления волновых возмущений. Построены равномерные и неравномерные асимптотические решения, позволяющие описывать амплитудно-фазовую структуру дальних полей поверхностных и внутренних волн. Установлено, что равномерные асимптотики позволяют эффективно рассчитывать дальние волновые поля как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, поверхностные волны, равномерные асимптотики, волновой фронт, функция Эйри

Цитирование: И. Ю. Владимиров Асимптотики дальних полей поверхностных и внутренних гравитационных волн от локальных и нелокальных источников возмущений // Russian Journal of Earth Sciences. — 2023. — Т. 23. — ES4005. — DOI: <https://doi.org/10.2205/2023es000853>

Введение

Важным механизмом возбуждения полей внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) является их генерация источниками возмущений различного физического происхождения: природного (движущиеся возмущения атмосферного давления, обтекание неровностей рельефа дна океана, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров [Haney u Young, 2017; Morozov, 2018; *The Ocean in Motion*, 2018; Voelker u др., 2019; Wang u др., 2017]. Система уравнений гидродинамики, описывающая волновые возмущения, в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу, и основные результаты решений задач о генерации внутренних гравитационных волн представляются в самой общей интегральной форме [Черкесов, 1976; Bulatov u др., 2019; Gushchin u Matyushin, 2016; Matyushin, 2019; Pedlosky, 2003; Sutherland, 2010]. В этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их исследования, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений при натуральных измерениях в природных средах. Существующие подходы к описанию волновых картин в линейном приближении основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и анализе их асимптотик [Broutman u др., 2021; Bulatov u Vladimirov, 2020; 2021c; Svirskunov u Kalashnik, 2014; *The Ocean in Motion*, 2018].

При математическом моделировании генерации внутренних гравитационных волн, возбуждаемых нелокальными источниками возмущений, наиболее распространенными являются два способа. Первый заключается в численном решении линеаризованной системы уравнений гидродинамики [Gushchin u Matyushin, 2016; Matyushin, 2019]. К его

Получено: 21 марта 2023 г.

Принято: 22 мая 2023 г.

Опубликовано: 24 октября 2023 г.



© 2023. Коллектив авторов.

недостаткам следует отнести ограниченность области пространства, в которой возможно численное решение задачи. Второй способ состоит в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму нелокального источника, функцией, имеющей достаточно простой вид, или системой точечных источников, взятых с некоторым весом [Bulatov u Vladimirov, 2020; Voelker u др., 2019]. Очевидно, что при решении задачи таким способом возникает проблема оценки границ применимости различных упрощающих аппроксимаций.

Как правило, в непосредственной окрестности нелокальных источников возмущений, например, вблизи возникающих при их движении турбулентных следов, зон сильных перемешиваний, вихревых образований, уравнения гидродинамики существенно нелинейны, и для описания ближнего поля необходимо прибегать к громоздким численным расчетам [Abdilghanie u Diamessis, 2013; Chai u др., 2022]. С другой стороны, при расчете дальнего распространения внутренних гравитационных волн прямые численные расчеты (например, методом конечных разностей) нецелесообразны. Однако в дальней зоне волновые поля относительно малы по амплитуде, и обычно их можно описать посредством линейных уравнений [Bulatov u др., 2021b; Miropol'sky, 2001]. При этом начальные и граничные условия должны определяться или из результатов прямого численного моделирования ближнего поля с учетом нелинейных уравнений гидродинамики, или из сугубо оценочных (полуэмпирических) соображений, позволяющих аппроксимировать ближнее поле некоторой системой модельных источников возмущений [Gushchin u Matyushin, 2016; Matyushin, 2019].

Поверхностные волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [Чержесов, 1976; Lighthill, 1978; Mei u др., 2018; Wehausen u Laitone, 1960]. В ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе относительно простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой однородной жидкости [Chen u Wu, 2001; Dobrokhotov u др., 2016; Gnevyshev u Badulin, 2020; Svirkinov u Kalashnik, 2014]. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления поверхностных волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред. Ряд результатов асимптотического анализа линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения поверхностных возмущений, лежит в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации океанических волн экстремально большой амплитуды – волн-убийц [Kharif u др., 2009]. Для мониторинга и предупреждения опасных природных явлений в океане, в том числе обнаружения волн большой амплитуды, необходимо проводить оперативный анализ волновых явлений с помощью различных математических моделей. Одной из основных используемых моделей можно считать предположение о генерации волновых пакетов импульсным воздействием. Для проведения прогнозных расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемому, в том числе по фотоснимкам из космоса, волновым картинам [Belyaev u др., 2009; Mei u др., 2018; The Ocean in Motion, 2018]. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

1. Внутренние гравитационные волны от радиально симметричного возвышения изопикн

В настоящем разделе излагаются результаты, описывающие дальние поля линейных внутренних гравитационных волн, возбуждаемых мгновенным радиально симметричным возвышением изопикн (линий равной плотности) в слое стратифицированной среды конечной толщины. Поле возвышения изопикн $\eta(r, z, t)$ в слое стратифицирован-

ной среды $-H < z < 0$ в цилиндрических координатах (r, z) (зависимости от угла нет, ось z направлена вверх) в приближении Буссинеска определяется из задачи [Bulatov u Vladimirov, 2021b; Lighthill, 1978]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta(r, z, t) + N^2(z) \Delta \eta(r, z, t) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\eta(r, z, 0) = \Phi(r) \Pi(z),$$

$$\eta(r, z, t) = 0 \text{ при } z = 0, -H,$$

$$\frac{\partial \eta(r, z, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Отметим, что постановка задачи и формулировка граничных условий (приближение Буссинеска и «твердой крышки», пренебрежение вязкостью) приведены в контексте, общепринятом в современной научной литературе, посвященной изучению динамики линейных внутренних гравитационных волн [Черкесов, 1976; Lighthill, 1978; Pedlosky, 2003; Sutherland, 2010]. Далее частота Брента – Вайсяля (частота плавучести) считается постоянной: $N^2(z) = N^2 = \text{const}$. Предполагается, что начальное возмущение изопоки обладает распределением по глубине с одним максимумом, что соответствует по качественному характеру наблюдаемым в реальных природных средах (океан, атмосфера) нелокальным источникам [Belyaev u др., 2009; Khimchenko u др., 2020; Morozov, 2018; Morozov u др., 2018]. Решение полученной начально-краевой задачи строится с помощью преобразования Фурье – Ханкеля и в безразмерных переменных $r^* = \pi r/H, z^* = \pi z/H, \eta^* = \pi \eta/H, t^* = Nt$ (индекс «*» далее опускается) имеет вид [Bulatov u Vladimirov, 2021b; Fröman u Fröman, 2002; Watson, 1995]:

$$\eta(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz) g_n(r, t), \tag{1.1}$$

$$g_n(r, t) = \int_0^{\infty} k A(k) J_0(kr) \cos(\omega_n(k)t) dk, \tag{1.2}$$

$$A(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr) \Phi(r) dr, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \Pi(z) \sin(nz) dz, \quad \omega_n(k) = k/\sqrt{k^2 + n^2}$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Выражение для горизонтальной (радиальной) компоненты скорости $U(r, z, t)$ определяется из уравнения несжимаемости в цилиндрических координатах [Lighthill, 1978]

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

а также из условия, что решением уравнения [Fröman u Fröman, 2002; Watson, 1995]

$$\frac{\partial Y(kr)}{\partial r} + \frac{Y(kr)}{r} = J_0(kr)$$

является функция $Y(kr) = J_1(kr)/k$, где J_1 – функция Бесселя первого порядка. Используя эти решения, можно получить выражения для вертикальной $W(r, z, t) = \frac{\partial \eta(r, z, t)}{\partial t}$ и горизонтальной (радиальной) $U(r, z, t)$ компонент скорости частиц во внутренних волнах, которые имеют вид [Bulatov u Vladimirov, 2021b]:

$$W(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz) p_n(r, t), \quad U(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nz) q_n(r, t),$$

$$\begin{aligned}
 p_n(r, t) &= - \int_0^\infty kA(k)J_0(kr)\omega_n(k) \sin(\omega_n(k)t)dk, \\
 q_n(r, t) &= \int_0^\infty A(k)J_1(kr)\omega_n(k) \sin(\omega_n(k)t)dk.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Далее в качестве модельного рассмотрим следующее радиальное распределение начального возмущения: $\Phi(r) = \exp(-r^2/4)/2$ (множитель 1/2 используется для простоты выкладок). Тогда имеем: $A(k) = \exp(-k^2)$. Интегралы (1.2), (1.3) при больших значениях $r \gg 1, t \gg 1, r/t = V = \text{const}$ можно вычислить с помощью метода стационарной фазы [Borovikov, 1994]. С этой целью необходимо заменить функцию Бесселя на ее асимптотику: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$ [Fröman u Fröman, 2002; Watson, 1995]. Подставляя это выражение в (1.2), можно получить:

$$\begin{aligned}
 g_n(r, t) &= \sqrt{2/\pi r} \int_0^\infty \exp(-k^2)\sqrt{k} \cos(kr - \pi/4) \cos(\omega_n(k)t)dk = I_n^+ + I_n^-, \\
 I_n^\pm &= \sqrt{1/2\pi r} \int_0^\infty \exp(-k^2)\sqrt{k} \cos(kr \pm \omega_n(k)t - \pi/4)dk.
 \end{aligned}$$

При больших значениях r, t ($r/t = \text{const}$) интеграл I_n^+ экспоненциально мал, так как стационарных точек на интервале интегрирования нет. С помощью метода стационарной фазы можно получить уравнение для нахождения стационарных точек: $\omega'_n = V, V = r/t$. Решение этого уравнения имеет вид: $k_n(V) = n\sqrt{(nV)^{-2/3} - 1}$. Окончательно можно получить

$$\begin{aligned}
 g_n(r, t) &= G_n(r, t) \cos(\Phi_n(r, t)), \\
 G_n(r, t) &= \frac{n^2 \exp(n^2(1 - (nV)^{-2/3}))}{\sqrt{3}t(nV)^{4/3}}, \\
 \Phi_n(r, t) &= t(1 - (nV)^{2/3})^{3/2}.
 \end{aligned}$$

Аналогично, с помощью метода стационарной фазы имеем

$$\begin{aligned}
 p_n(r, t) &= P_n(r, t) \sin(\Phi_n(r, t)), P_n(r, t) = -(1 - (nV)^{2/3})^{1/2}G_n(r, t), \\
 q_n(r, t) &= Q_n(r, t) \cos(\Phi_n(r, t)), Q_n(r, t) = \frac{\exp(n^2(1 - (nV)^{-2/3}))}{\sqrt{3}Vt}.
 \end{aligned}$$

Полученные асимптотические формулы для функций $g_n(r, t), p_n(r, t), q_n(r, t)$ позволяют соответственно рассчитывать пространственно-временные характеристики возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости частиц во внутренних гравитационных волнах от начального радиально-симметричного смещения изопикн. Однако эти асимптотики неприменимы вблизи волновых фронтов [Fröman u Fröman, 2002]. Для построения локальных асимптотик, то есть асимптотик, описывающих поле внутренних гравитационных волн вблизи волновых фронтов, заменим далее в интеграле I_n^- функции $\omega_n(k)$ и $\exp(-k^2)$ при малых волновых числах следующими разложениями: $\omega_n(k) \approx k/n - k^3n^{-3}/2, \exp(-k^2) \approx 1$. Тогда можно получить [Bulatov u Vladimirov, 2021b]:

$$g_n(r, t) \approx \sqrt{1/2\pi r} \int_0^\infty \sqrt{k} \cos(k^3tn^{-3}/2 + \xi k - \pi/4)dk, \xi = r - t/n.$$

При малых значениях ξ (вблизи волновых фронтов) стационарные точки стремятся к нулю, то есть к концевой точке контура интегрирования и одновременно к точке ветвления внеэкспоненциального множителя. В этом случае метод стационарной фазы неприменим, и для построения локальных асимптотик с помощью подходящей замены следует свести исходный интеграл к более сложному эталонному интегралу. Модельным

в этом случае будет следующий интеграл, который выражается через квадрат функции Эйри [Borovikov, 1994; Fröman u Fröman, 2002]:

$$D(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \cos(u^3/12 + xu + \pi/4) du = 2\pi^{3/2} \text{Ai}^2(x),$$

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos(u^3/3 + xu) du.$$

Функция $D(x)$ удовлетворяет уравнению $D'''(x) = 4xD'(x) + 2D(x)$, которое решается методом Лапласа [Borovikov, 1994; Fröman u Fröman, 2002]. Тогда, с помощью замены $k = un(6t)^{-1/3}$ можно получить выражения для локальных асимптотик, имеющие вид

$$g_n(r, t) \approx \frac{n^{3/2} J(\Theta)}{2\sqrt{3\pi r t}}, \quad \Theta = \frac{nr - t}{(6t)^{1/3}}, \tag{1.4}$$

$$J(x) = D'(x) = -4\pi^{3/2} \text{Ai}(x) \text{Ai}'(x) = \int_0^\infty \sqrt{u} \cos(u^3/12 + xu - \pi/4) du.$$

Локальные асимптотики для функций $p_n(r, t)$ получаются из (1.4) дифференцированием по переменной t (при этом дифференцируется только функция J):

$$p_n(r, t) \approx \frac{n^{3/2} E(\Theta)}{(6t)^{5/6} \sqrt{2\pi r}}, \quad E(\Theta) = 4\pi^{3/2} ((\text{Ai}'(\Theta))^2 + \Theta \text{Ai}^2(\Theta)).$$

Выражения для локальных асимптотик горизонтальной (радиальной) компоненты скорости имеют вид

$$q_n(r, t) \approx \frac{n^{1/2} J(\Theta)}{2\sqrt{3\pi r t}}.$$

Можно отметить, что выражения для асимптотик возвышения изопикн $g_n(r, t)$ и горизонтальной (радиальной) компоненты скорости $q_n(r, t)$ совпадают с точностью до множителя n (номера моды).

Более сложной является задача построения равномерных асимптотик, которые позволяют описать волновые поля при $r, t \gg 1$ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов [Bulatov u Vladimirov, 2021a]. После замены в (1.2) функции Бесселя на ее асимптотику при $kr \gg 1$ ($J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$) [Fröman u Fröman, 2002; Watson, 1995] получающийся в результате интеграл может быть представлен в виде

$$g_n(r, t) = L_n^+(r, t) + L_n^-(r, t),$$

$$L_n^+(r, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it\beta_n(k) - i\pi/4) dk = L_n^+,$$

$$L_n^-(r, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it\gamma_n(k) - i\pi/4) dk = L_n^-,$$

$$F(k) = \frac{kA(k)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \beta_n(k) = kV + \omega_n(k), \quad \gamma_n(k) = kV - \omega_n(k),$$

где $V = r/t$ и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Поскольку $\omega_n(k)$ – монотонно возрастающая функция переменной k , то фазовая функция $\beta_n(k)$ интеграла L_n^+ не имеет стационарных точек на действительной оси, поэтому при больших значениях r, t интеграл L_n^+ экспоненциально мал. Оценим далее интеграл L_n^- . Обозначим через $c_n = \omega'_n(0) = 1/n$ максимальную групповую скорость отдельной моды внутренних волн. Тогда при $0 < V < c_n$ фазовая функция $\gamma_n(k) = kV - \omega_n(k)$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_n(V) = \pm n\sqrt{(Vn)^{-2/3} - 1}$. Вблизи волнового фронта каждой моды, то есть при $V \rightarrow c_n$, эти две стационарные точки сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления

$k = 0$. При $V > c_n$ две стационарные точки $\pm k_n(V)$ располагаются на мнимой оси. Для построения равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики интеграла L_n^- , позволяющей описывать дальние волновые поля как вблизи, так и вдали от волновых фронтов, необходимо выполнить регулярную замену переменной $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma_n(k) = kV - \omega_n(k)$ в новую функцию $\tau(s) = -\sigma s + s^3/3$ [Fröman u Fröman, 2002; Kravtsov u Orlov, 1993]. Таким образом, фазовая функция может быть представлена в виде: $\gamma_n(k(s)) = -\sigma s + s^3/3$. При этом стационарным точкам $\pm k_n(V)$ будут отвечать точки $\pm\sqrt{\sigma}$. Тогда для σ можно получить: $\sigma = (-3\gamma_n(k_n(V)))^{2/3}$. В результате такой замены переменных интеграл L_n^- может быть представлен в виде

$$L_n^- = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(s)}{\sqrt{s}} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds, \quad G(s) = F(k(s)) \sqrt{\frac{s}{k(s)}} \frac{dk}{ds},$$

где функция $G(s)$ – регулярная функция переменной s . Тогда, в соответствии с общей схемой построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов), функцию $G(s)$ можно представить в виде [Bulatov u др., 2021a; Fröman u Fröman, 2002; Kravtsov u Orlov, 1993]: $G(s) = P(s) + R(s)$, где $P(s) = b_2s^2 + b_1s + b_0$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $s = 0, \pm\sqrt{\sigma}$, и $R(s)$ – регулярная функция. В результате можно получить

$$L_n^- = L_P + L_R,$$

$$L_P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{\sqrt{s}} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds,$$

$$L_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)}{\sqrt{s}} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds.$$

Интеграл L_P вычисляется аналитически [Bulatov u др., 2021a; Fröman u Fröman, 2002; Kravtsov u Orlov, 1993]:

$$L_P = \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(-ib_0 2^{5/3} t^{-1/6} \text{Ai}^2(\theta) - 2b_1 t^{-1/2} (\text{Ai}^2(\theta))' + ib_2 2^{1/3} t^{-5/6} (\text{Ai}^2(\theta))'' \right),$$

$$\theta = -\sigma(t/2)^{2/3}.$$

С помощью интегрирования по частям можно показать, что для L_R справедлива оценка: $L_R = O(L_P/t)$. В силу нечетности функции $F(k)$ можно получить: $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 = G(\sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma} = F(k_n(V))\sqrt{2/(k_n(V)\gamma_n''(k_n(V)))}$. Тогда главный член равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики отдельной волновой моды при $r, t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$g_n(r, t) \approx -2\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta). \tag{1.5}$$

Равномерные асимптотики для функций $p_n(r, t)$ и $q_n(r, t)$ при $r, t \rightarrow \infty$ вычисляются аналогично и имеют вид

$$p_n(r, t) \approx -2^{1/3} \pi^{3/2} t^{-5/6} \sqrt{\frac{2}{\sigma k_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \omega_n(k_n(V)) ((\text{Ai}'(\theta))^2 + \theta \text{Ai}^2(\theta)),$$

$$q_n(r, t) \approx -2\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \frac{\omega_n(k_n(V))}{k_n(V)} \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta).$$

2. Поверхностные гравитационные волны от вспыхнувшего локализованного источника

В настоящем разделе рассматриваются равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых вспыхнувшим ис-

точником. Исследуются волновые возмущения на поверхности идеальной однородной жидкости конечной глубины H , распространяющиеся от точечного импульсного источника, вспыхнувшего в момент времени $t = 0$. Источник находится на глубине z_0 (т.е. в точке $(0, 0, -z_0)$; $0 < z_0 < H$) и мгновенно выбрасывает объем жидкости Q . Следуя [Lighthill, 1978; Mei и др., 2018; Wehausen и Laitone, 1960], потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ ($\nabla\Phi = (u, v, w)$, u, v, w – компоненты возмущения вектора скорости потока) в линейном приближении можно описать уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x, y, z, t) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z + z_0) \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, z = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, z = -H; \quad \Phi \equiv 0, t < 0 \end{cases},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, g – ускорение свободного падения. Решение этой задачи получается путем применения преобразования Фурье по переменным x, y, t . Тогда возвышение свободной поверхности жидкости $\eta(x, y, t)$ можно представить в виде

$$\eta(x, y, t) = \frac{iQ}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega ch(k(H - z_0))}{ch(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))} \exp(-i(\omega t + \mu x + \nu y)) d\nu d\mu d\omega, \quad (2.1)$$

где $\Omega^2(k) = gkth(kH)$ – дисперсионное соотношение для поверхностных волн в слое конечной толщины [Lighthill, 1978; Mei и др., 2018; Wehausen и Laitone, 1960].

Далее будут исследоваться асимптотики интеграла (2.1), позволяющие эффективно рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики волновых полей вдали от источника возмущений. Внутренний интеграл в (2.1) по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Контур интегрирования необходимо сместить в область $Im\omega > 0$, тогда замыкая его в нижнюю полуплоскость и учитывая полюса при $\omega = \pm\Omega(k)$, можно получить

$$\eta(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ch(k(H - z_0))}{ch(kH)} \exp(-i(\mu x + \nu y)) \cos(\Omega(k)t) d\nu d\mu.$$

Перейдем далее к полярным координатам: $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$; $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, проинтегрируем по переменной ψ , в результате будем иметь

$$\eta(r, t) = \frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ch(k(H - z_0))}{ch(kH)} k J_0(kr) \cos(\Omega(k)t) dk. \quad (2.2)$$

Аналогично разд. 1 заменим в (2.2) функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$ [Fröman и Fröman, 2002; Watson, 1995]. Получающийся в результате интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= I_+(r, t) + I_-(r, t), \\ I_{\pm}(r, t) &= \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it(kV \pm \Omega(k)) - i\pi/4) dk, \\ F(k) &= \frac{kch(k(H - z_0))}{2\sqrt{2r}\pi^{3/2}ch(kH)}, \end{aligned}$$

где $V = r/t$, функция $\Omega(k)$ продолжается при $k < 0$ нечетным образом и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Далее рассматривается асимптотика интегралов $I_{\pm}(r, t)$ при больших значениях r, t и фиксированных значениях V , то есть в точке, движущейся в радиальном направлении со скоростью V . Поскольку $\Omega(k)$ – монотонно возрастающая функция k , то фазовая функция интеграла $I_+(r, t)$ не имеет стационарных точек на действительной оси k , потому этот интеграл экспоненциально мал при $t \rightarrow \infty$ (точнее, при

$Vt/H \gg 1$). При выполнении условия $V < C$ ($C = \sqrt{gH}$ – максимальная групповая скорость поверхностных волн) фазовая функция интеграла $L_-(r, t)$ имеет две стационарных точки на действительной оси: $\pm k_0$, где k_0 – положительный корень уравнения: $q'(k) = 0$, $q(k) = kV - \Omega(k)$. Тогда главный член асимптотики возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ может быть вычислен по методу стационарной фазы [Borovikov, 1994; Fröman u Fröman, 2002]:

$$\eta(r, t) \approx Q \sqrt{\frac{2\pi}{tk_0 q''(k_0)}} F(k_0) \cos(tq(k_0)). \tag{2.3}$$

Асимптотика (2.3) становится непригодной при $V \rightarrow C$, то есть вблизи волнового фронта, где стационарные точки $\pm k_0$ сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления $k = 0$. Вычислим далее локальную асимптотику интеграла $L_-(r, t)$ вблизи волнового фронта, то есть при $V \rightarrow C$ и, соответственно, при $r \approx Ct$. Очевидно, что основной вклад в локальную асимптотику дает окрестность значения $k = 0$, которое отвечает распространению длинных волн с максимальной групповой скоростью [Lighthill, 1978; Svirkunov u Kalashnik, 2014]. При малых значениях k функции $F(k)$, $q(k)$ допускают следующие разложения: $F(k) = F'(0)k + \dots$, $q(k) = q'(0)k + q'''(0)k^3/6 + \dots$, где $F'(0) = (2\pi)^{-3/2} r^{-1/2}$, $q'(0) = V - C$, $q'''(0) = \sqrt{gH}^{5/2}$. Аппроксимируя $F(k)$ и $q(k)$ этими разложениями, можно получить:

$$L_-(r, t) \approx \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F'(0) \sqrt{k} \exp(it(q'(0)k + q'''(0)k^3/6) - i\pi/4) dk.$$

Локальная асимптотика возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ в окрестности волнового фронта (т.е. при $r \approx Ct$) выражается через функцию Эйри и ее производную [Borovikov, 1994; Fröman u Fröman, 2002; Watson, 1995]

$$\eta(r, t) \approx -\frac{Q}{g^{1/4} H^{5/4} r^{1/2} t^{1/2}} \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta), \theta = \frac{r - Ct}{(2t)^{1/3} g^{1/6} H^{5/6}}.$$

Равномерная (по параметру V) асимптотика возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ вычисляется описанным в разд. 1 способом. В итоге для ее главного члена получается следующая формула: [Bulatov u др., 2021a]

$$\eta(r, t) \approx -2Q\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_0 q''(k_0)}} F(k_0) \text{Ai}(-\sigma(t/2)^{2/3}) \text{Ai}'(-\sigma(t/2)^{2/3}), \tag{2.4}$$

где $\sigma = (-3q(k_0)/2)^{2/3}$, k_0 – стационарная точка функции $q(k)$, расположенная на положительной действительной или на положительной мнимой оси.

3. Результаты численного моделирования

Использованные в расчетах пространственно-временные параметры соответствуют возможным масштабам источников возбуждения поверхностных и внутренних волн в океане [Belyaev u др., 2009; Khimchenko u др., 2020; Mei u др., 2018; Morozov, 2018; Özsoy, 2021; The Ocean in Motion, 2018]. Для численных расчетов полей внутренних волн был задан следующий вид функций $\Phi(r)$ и $\Pi(z)$, описывающих соответственно радиальную и вертикальную структуру начального смещения изопоикн: $\Phi(r) = \exp(-r^2/4)/2$, $\Pi(z) = (-z/\pi)^\alpha (1 + z/\pi)^\beta$, $\alpha = 3$, $\beta = 8$.

На рис. 1 в размерных переменных приведены результаты расчетов равномерной асимптотики первой моды возвышения изопоикн $\eta_1(r, z, t)$ для горизонта наблюдения $z = -318$ м. Вычисления проводились по

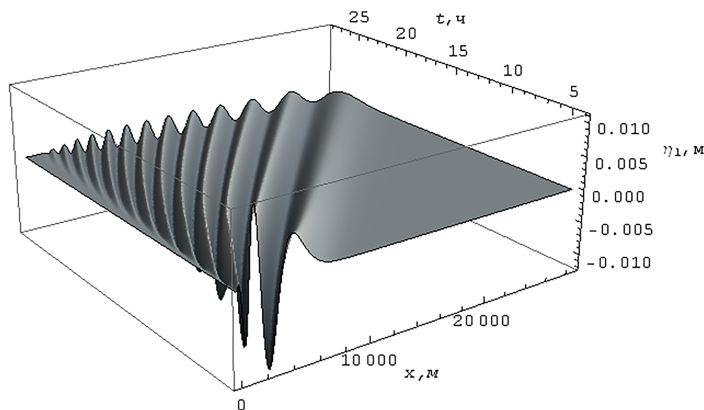


Рис. 1. Равномерная асимптотика первой моды возвышения изопоикн $\eta_1(r, z, t)$.

формулам (1.1), (1.5). Для пересчета в размерные переменные были взяты следующие значения частоты Брента – Вайсяля N и толщины слоя жидкости H : $N = 0,001 \text{ c}^{-1}$, $H = 1000 \text{ м}$. На рис. 2 проиллюстрирована равномерная асимптотика поля возвышения $\eta_1(r, z, t)$ на том же горизонте при $t = 10 \text{ ч}$.

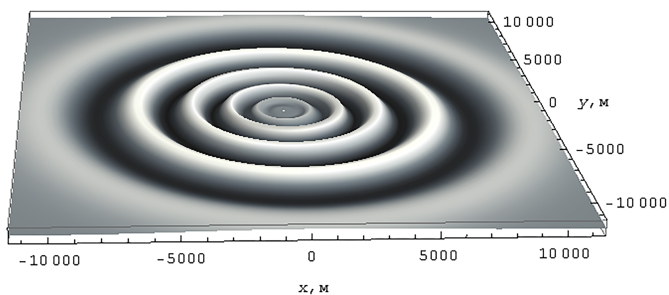


Рис. 2. Равномерная асимптотика поля возвышения изопикн $\eta_1(r, z, t)$ в момент времени $t = 10 \text{ ч}$.

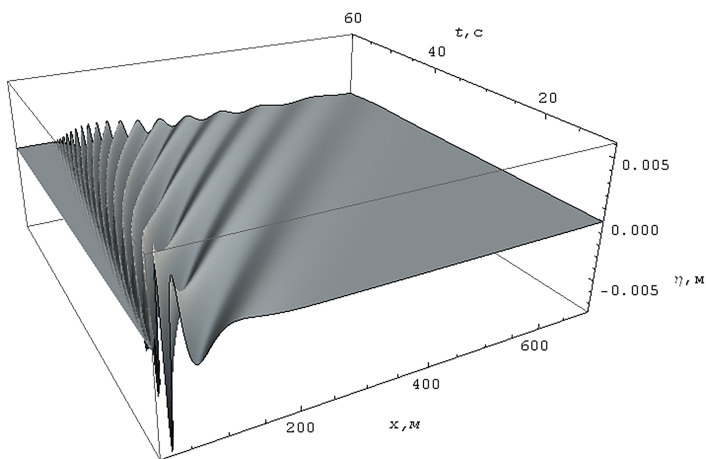


Рис. 3. Равномерная асимптотика поля возвышения свободной поверхности.

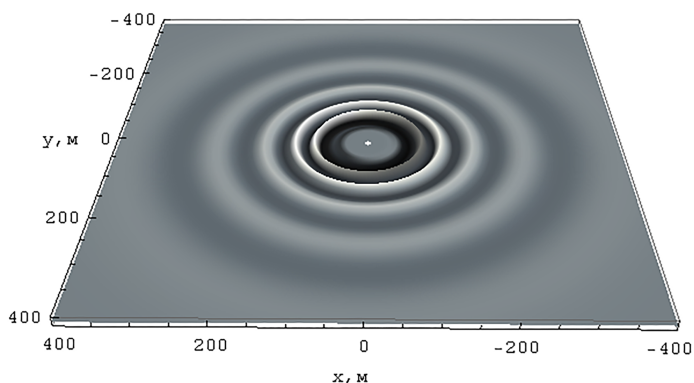


Рис. 4. Равномерная асимптотика поля возвышения свободной поверхности в момент времени $t = 30 \text{ с}$.

Для расчета поверхностных возмущений от импульсного источника были использованы следующие значения параметров задачи: мощность источника $Q = 10 \text{ м}^3$, глубина бассейна $H = 20 \text{ м}$, глубина источника $z_0 = 4 \text{ м}$. На рис. 3 представлено поле возвышения свободной поверхности $\eta(r, t)$, найденное с помощью равномерной асимптотики, построенной по формуле (2.4). На рис. 4 изображено то же поле в момент времени $t = 30 \text{ с}$.

Как показывают численные расчеты, на временах порядка 10 и более периодов плавучести для внутренних волн и 10 и более величин $\sqrt{H/g}$ для поверхностных волн построенные равномерные асимптотики волновых мод позволяют адекватно описывать дальние поля как вблизи, так и вдали от волнового фронта. С другой стороны, асимптотики по методу стационарной фазы работают только внутри фронта, а локальные асимптотики – лишь в его непосредственной окрестности.

4. Заключение

Изложенные в работе методы построения асимптотик решений позволяют рассчитывать поверхностные и внутренние гравитационные волны вдали от произвольных нелокальных источников возмущений. Аналитические и численные исследования эволюции диспергирующих волн от нелокальных источников в природных средах показывают, что структура волновых картин на больших расстояниях от этих источников (много больших их характерных размеров) практически не зависит от их формы и определяется только законом дисперсии и скоростью источников [Lighthill, 1978; Morozov, 2018; Svirkinov u Kalashnik, 2014; The Ocean in Motion, 2018]. Поэтому полученные в работе результаты позволяют не только эффективно рассчитывать дальние волновые поля, но и проводить качественную оценку получаемых решений.

Изложенные подходы к исследованию дальних полей внутренних и поверхностных гравитационных волн сочетают сравнительную простоту и вычислительную мощность аналитических результатов, а также возможность их качественного анализа. Предложенные асимптотические методы могут быть использованы для исследования любых других волновых процессов (акустические и сейсмические волны, СВЧ-излучение, волны цунами и т.п.) в реальных геофизических и гидрофизических средах со сложной структурой, так как значение использованных методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они

могут явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов при математическом моделировании волновых пакетов иной физической природы.

Благодарности. Работа выполнена по теме государственного задания № FMWE-2021-0002.

Список литературы

- Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. — Киев : Наукова думка, 1976. — С. 364.
- Abdilghanie A. M., Diamessis P. J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2013. — Vol. 720. — P. 104–139. — DOI: [10.1017/jfm.2012.640](https://doi.org/10.1017/jfm.2012.640).
- Belyaev M. Y., Desinov L. V., Krikalev S. K., *et al.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2009. — Vol. 48, no. 1. — P. 110–120. — DOI: [10.1134/s1064230709010109](https://doi.org/10.1134/s1064230709010109).
- Borovikov V. A. Uniform stationary phase method. — London : Institution of Electrical Engineers, 1994. — P. 233.
- Broutman D., Brandt L., Rottman J. W., *et al.* A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // *Wave Motion*. — 2021. — Vol. 105. — P. 102759. — DOI: [10.1016/j.wavemoti.2021.102759](https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2021.102759).
- Bulatov V. V., Vladimirov I. Y. Uniform Asymptotics of Internal Gravitational Wave Fields from an Initial Radially Symmetric Perturbation // *Fluid Dynamics*. — 2021a. — Vol. 56, no. 8. — P. 1112–1118. — DOI: [10.1134/s0015462821080103](https://doi.org/10.1134/s0015462821080103).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V. Asymptotics of the Far Fields of Internal Gravity Waves Excited by a Source of Radial Symmetry // *Fluid Dynamics*. — 2021b. — Vol. 56, no. 5. — P. 672–677. — DOI: [10.1134/s0015462821050013](https://doi.org/10.1134/s0015462821050013).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V., Vladimirov I. Y. Far fields of internal gravity waves from a source moving in the ocean with an arbitrary buoyancy frequency distribution // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2019. — Vol. 19, no. 5. — P. 1–9. — DOI: [10.2205/2019es000667](https://doi.org/10.2205/2019es000667).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V., Vladimirov I. Y. Uniform and Nonuniform Asymptotics of Far Surface Fields from a Flashed Localized Source // *Fluid Dynamics*. — 2021a. — Vol. 56, no. 7. — P. 975–980. — DOI: [10.1134/s001546282107003x](https://doi.org/10.1134/s001546282107003x).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V., Vladimirov I. Y., *et al.* Features of the Phase Structure of Internal Gravity Waves Generated by a Moving Source // *Doklady Earth Sciences*. — 2021b. — Vol. 501, no. 1. — P. 959–962. — DOI: [10.1134/s1028334x21090051](https://doi.org/10.1134/s1028334x21090051).
- Bulatov V., Vladimirov Y. Generation of Internal Gravity Waves Far from Moving Non-Local Source // *Symmetry*. — 2020. — Vol. 12, no. 11. — P. 1899. — DOI: [10.3390/sym12111899](https://doi.org/10.3390/sym12111899).
- Bulatov V., Vladimirov Y. Far Fields of Internal Gravity Waves under Fast Density Variation in a Radial Symmetry Source // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2021c. — Vol. 57, no. 6. — P. 614–618. — DOI: [10.1134/s0001433821050029](https://doi.org/10.1134/s0001433821050029).
- Chai J., Wang Z., Yang Z., *et al.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // *Ocean Engineering*. — 2022. — Vol. 266. — P. 112840. — DOI: [10.1016/j.oceaneng.2022.112840](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112840).
- Chen X.-B., Wu G. X. On singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — Vol. 445. — P. 77–91. — DOI: [10.1017/s0022112001005481](https://doi.org/10.1017/s0022112001005481).
- Dobrokhotov S. Y., Grushin V. V., Sergeev S. A., *et al.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with nonuniform bottom with rapidly oscillating sections // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 23, no. 4. — P. 455–474. — DOI: [10.1134/s1061920816040038](https://doi.org/10.1134/s1061920816040038).
- Fröman N., Fröman P. O. Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002. — P. 214. — DOI: [10.1017/cbo9780511535086](https://doi.org/10.1017/cbo9780511535086).
- Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // *Fluids*. — 2020. — Vol. 5, no. 4. — P. 219. — DOI: [10.3390/fluids5040219](https://doi.org/10.3390/fluids5040219).
- Gushchin V. A., Matyushin P. V. Simulation and study of stratified flows around finite bodies // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 56, no. 6. — P. 1034–1047. — DOI: [10.1134/s0965542516060142](https://doi.org/10.1134/s0965542516060142).
- Haney S., Young W. R. Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 829. — P. 280–303. — DOI: [10.1017/jfm.2017.536](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.536).
- Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 260. — DOI: [10.1007/978-3-540-88419-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88419-4).

- Khimchenko E. E., Frey D. I., Morozov E. G. Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russian Journal of Earth Sciences. — 2020. — Vol. 20, no. 2. — P. 1–6. — DOI: [10.2205/2020es000711](https://doi.org/10.2205/2020es000711).
- Kravtsov Y. A., Orlov Y. I. Caustics, Catastrophes and Wave Fields. — Springer Berlin Heidelberg, 1993. — P. 228. — DOI: [10.1007/978-3-642-59887-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-59887-6).
- Lighthill M. J. Waves in fluids. — Cambridge University Press, 1978. — P. 524.
- Matyushin P. V. Process of the Formation of Internal Waves Initiated by the Start of Motion of a Body in a Stratified Viscous Fluid // Fluid Dynamics. — 2019. — Vol. 54, no. 3. — P. 374–388. — DOI: [10.1134/s0015462819020095](https://doi.org/10.1134/s0015462819020095).
- Mei C. C., Stiassnie M., Yue D. K. Theory and applications of ocean surface waves. — London : World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2018. — P. 1240.
- Miropol'sky Y. Z. Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean / ed. by O. D. *Shishkina*. — Springer Netherlands, 2001. — P. 406. — DOI: [10.1007/978-94-017-1325-2](https://doi.org/10.1007/978-94-017-1325-2).
- Morozov E. G. Oceanic Internal Tides: Observations, Analysis and Modeling. — Springer International Publishing, 2018. — P. 317. — DOI: [10.1007/978-3-319-73159-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73159-9).
- Morozov E. G., Tarakanov R. Y., Frey D. I., *et al.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // Journal of Oceanography. — 2018. — Vol. 74, no. 2. — P. 147–167. — DOI: [10.1007/s10872-017-0445-x](https://doi.org/10.1007/s10872-017-0445-x).
- Özsoy E. Geophysical Fluid Dynamics II. — Springer International Publishing, 2021. — P. 323. — DOI: [10.1007/978-3-030-74934-7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-74934-7).
- Pedlosky J. Waves in the Ocean and Atmosphere. — Springer Berlin Heidelberg, 2003. — P. 260. — DOI: [10.1007/978-3-662-05131-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05131-3).
- Sutherland B. R. Internal Gravity Waves. — Cambridge University Press, 2010. — P. 394. — DOI: [10.1017/cbo9780511780318](https://doi.org/10.1017/cbo9780511780318).
- Svirkunov P. N., Kalashnik M. V. Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // Physics-Uspekhi. — 2014. — Vol. 57, no. 1. — P. 80–91. — DOI: [10.3367/ufne.0184.201401d.0089](https://doi.org/10.3367/ufne.0184.201401d.0089).
- The Ocean in Motion / ed. by M. G. *Velarde*, R. Y. *Tarakanov*, A. V. *Marchenko*. — Springer International Publishing, 2018. — P. 625. — DOI: [10.1007/978-3-319-71934-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-71934-4).
- Voelker G. S., Myers P. G., Walter M., *et al.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dynamics of Atmospheres and Oceans. — 2019. — Vol. 86. — P. 116–133. — DOI: [10.1016/j.dynatmoce.2019.03.005](https://doi.org/10.1016/j.dynatmoce.2019.03.005).
- Wang J., Wang S., Chen X., *et al.* Three-dimensional evolution of internal waves reflected from a submarine seamount // Physics of Fluids. — 2017. — Vol. 29, no. 10. — P. 106601. — DOI: [10.1063/1.4986167](https://doi.org/10.1063/1.4986167).
- Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge University Press, 1995. — P. 804.
- Wehausen J. V., Laitone E. V. Surface waves. Vol. 9. — Springer Verlag, 1960. — P. 446–778.

ASYMPTOTICS OF FAR FIELDS OF SURFACE AND INTERNAL GRAVITATIONAL WAVES FROM LOCAL AND NONLOCAL PERTURBATION SOURCES

I. Yu. Vladimirov¹ 

¹Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Correspondence to: I. Yu. Vladimirov, iyuvladimirov@rambler.ru

The far fields of internal gravity waves from a radially symmetric initial perturbation of lines of equal density in a layer of a stratified medium of finite thickness, as well as the far fields of surface waves from an impulse source in a homogeneous liquid of finite depth, are studied. Integral representations of wave perturbations are obtained. Uniform and non-uniform asymptotic solutions are constructed that allow describing the amplitude-phase structure of the far fields of surface and internal waves. It is established that uniform asymptotics make it possible to effectively calculate long range wave fields both near and far from the wave front.

Received: 21 March 2023

Accepted: 22 May 2023

Published: XX October 2023

Keywords: stratified medium, internal gravitational waves, far fields, surface waves, uniform asymptotics, wave front, Airy function



© 2023. The Authors.

Citation: I. Yu. Vladimirov (2023), Asymptotics of Far Fields of Surface and Internal Gravitational Waves from Local and Nonlocal Perturbation Sources, *Russ. J. Earth. Sci.*, 23, ES4005, <https://doi.org/10.2205/2023ES000853>

References

- Abdilghanie A. M., Diamessis P. J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2013. — Vol. 720. — P. 104–139. — DOI: [10.1017/jfm.2012.640](https://doi.org/10.1017/jfm.2012.640).
- Belyaev M. Y., Desinov L. V., Krikalev S. K., *et al.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2009. — Vol. 48, no. 1. — P. 110–120. — DOI: [10.1134/s1064230709010109](https://doi.org/10.1134/s1064230709010109).
- Borovikov V. A. Uniform stationary phase method. — London : Institution of Electrical Engineers, 1994. — P. 233.
- Broutman D., Brandt L., Rottman J. W., *et al.* A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // *Wave Motion*. — 2021. — Vol. 105. — P. 102759. — DOI: [10.1016/j.wavemoti.2021.102759](https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2021.102759).
- Bulatov V., Vladimirov Y. Generation of Internal Gravity Waves Far from Moving Non-Local Source // *Symmetry*. — 2020. — Vol. 12, no. 11. — P. 1899. — DOI: [10.3390/sym12111899](https://doi.org/10.3390/sym12111899).
- Bulatov V. V., Vladimirov I. Y. Uniform Asymptotics of Internal Gravitational Wave Fields from an Initial Radially Symmetric Perturbation // *Fluid Dynamics*. — 2021a. — Vol. 56, no. 8. — P. 1112–1118. — DOI: [10.1134/s0015462821080103](https://doi.org/10.1134/s0015462821080103).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V. Asymptotics of the Far Fields of Internal Gravity Waves Excited by a Source of Radial Symmetry // *Fluid Dynamics*. — 2021b. — Vol. 56, no. 5. — P. 672–677. — DOI: [10.1134/s0015462821050013](https://doi.org/10.1134/s0015462821050013).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V. Far Fields of Internal Gravity Waves under Fast Density Variation in a Radial Symmetry Source // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2021c. — Vol. 57, no. 6. — P. 614–618. — DOI: [10.1134/s0001433821050029](https://doi.org/10.1134/s0001433821050029).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V., Vladimirov I. Y. Far fields of internal gravity waves from a source moving in the ocean with an arbitrary buoyancy frequency distribution // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2019. — Vol. 19, no. 5. — P. 1–9. — DOI: [10.2205/2019es000667](https://doi.org/10.2205/2019es000667).
- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V., Vladimirov I. Y. Uniform and Nonuniform Asymptotics of Far Surface Fields from a Flashed Localized Source // *Fluid Dynamics*. — 2021a. — Vol. 56, no. 7. — P. 975–980. — DOI: [10.1134/s001546282107003x](https://doi.org/10.1134/s001546282107003x).

- Bulatov V. V., Vladimirov Y. V., Vladimirov I. Y., *et al.* Features of the Phase Structure of Internal Gravity Waves Generated by a Moving Source // *Doklady Earth Sciences*. — 2021b. — Vol. 501, no. 1. — P. 959–962. — DOI: [10.1134/s1028334x21090051](https://doi.org/10.1134/s1028334x21090051).
- Chai J., Wang Z., Yang Z., *et al.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // *Ocean Engineering*. — 2022. — Vol. 266. — P. 112840. — DOI: [10.1016/j.oceaneng.2022.112840](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112840).
- Chen X.-B., Wu G. X. On singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — Vol. 445. — P. 77–91. — DOI: [10.1017/s0022112001005481](https://doi.org/10.1017/s0022112001005481).
- Cherkesov L. V. Hydrodynamics of surface and internal waves. — Kyiv : Naukova Dumka, 1976. — P. 364. — (in Russian).
- Dobrokhotov S. Y., Grushin V. V., Sergeev S. A., *et al.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with nonuniform bottom with rapidly oscillating sections // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 23, no. 4. — P. 455–474. — DOI: [10.1134/s1061920816040038](https://doi.org/10.1134/s1061920816040038).
- Fröman N., Fröman P. O. *Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method*. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002. — P. 214. — DOI: [10.1017/cbo9780511535086](https://doi.org/10.1017/cbo9780511535086).
- Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // *Fluids*. — 2020. — Vol. 5, no. 4. — P. 219. — DOI: [10.3390/fluids5040219](https://doi.org/10.3390/fluids5040219).
- Gushchin V. A., Matyushin P. V. Simulation and study of stratified flows around finite bodies // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 56, no. 6. — P. 1034–1047. — DOI: [10.1134/s0965542516060142](https://doi.org/10.1134/s0965542516060142).
- Haney S., Young W. R. Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 829. — P. 280–303. — DOI: [10.1017/jfm.2017.536](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.536).
- Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. *Rogue Waves in the Ocean*. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 260. — DOI: [10.1007/978-3-540-88419-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88419-4).
- Khimchenko E. E., Frey D. I., Morozov E. G. Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2020. — Vol. 20, no. 2. — P. 1–6. — DOI: [10.2205/2020es000711](https://doi.org/10.2205/2020es000711).
- Kravtsov Y. A., Orlov Y. I. *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*. — Springer Berlin Heidelberg, 1993. — P. 228. — DOI: [10.1007/978-3-642-59887-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-59887-6).
- Lighthill M. J. *Waves in fluids*. — Cambridge University Press, 1978. — P. 524.
- Matyushin P. V. Process of the Formation of Internal Waves Initiated by the Start of Motion of a Body in a Stratified Viscous Fluid // *Fluid Dynamics*. — 2019. — Vol. 54, no. 3. — P. 374–388. — DOI: [10.1134/s0015462819020095](https://doi.org/10.1134/s0015462819020095).
- Mei C. C., Stiassnie M., Yue D. K. *Theory and applications of ocean surface waves*. — London : World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2018. — P. 1240.
- Miropol'sky Y. Z. *Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean* / ed. by O. D. *Shishkina*. — Springer Netherlands, 2001. — P. 406. — DOI: [10.1007/978-94-017-1325-2](https://doi.org/10.1007/978-94-017-1325-2).
- Morozov E. G. *Oceanic Internal Tides: Observations, Analysis and Modeling*. — Springer International Publishing, 2018. — P. 317. — DOI: [10.1007/978-3-319-73159-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73159-9).
- Morozov E. G., Tarakanov R. Y., Frey D. I., *et al.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // *Journal of Oceanography*. — 2018. — Vol. 74, no. 2. — P. 147–167. — DOI: [10.1007/s10872-017-0445-x](https://doi.org/10.1007/s10872-017-0445-x).
- Özsoy E. *Geophysical Fluid Dynamics II*. — Springer International Publishing, 2021. — P. 323. — DOI: [10.1007/978-3-030-74934-7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-74934-7).
- Pedlosky J. *Waves in the Ocean and Atmosphere*. — Springer Berlin Heidelberg, 2003. — P. 260. — DOI: [10.1007/978-3-662-05131-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05131-3).
- Sutherland B. R. *Internal Gravity Waves*. — Cambridge University Press, 2010. — P. 394. — DOI: [10.1017/cbo9780511780318](https://doi.org/10.1017/cbo9780511780318).
- Svirkunov P. N., Kalashnik M. V. Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // *Physics-Uspexhi*. — 2014. — Vol. 57, no. 1. — P. 80–91. — DOI: [10.3367/ufne.0184.201401d.0089](https://doi.org/10.3367/ufne.0184.201401d.0089).
- The Ocean in Motion* / ed. by M. G. *Velarde*, R. Y. *Tarakanov*, A. V. *Marchenko*. — Springer International Publishing, 2018. — P. 625. — DOI: [10.1007/978-3-319-71934-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-71934-4).
- Voelker G. S., Myers P. G., Walter M., *et al.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. — 2019. — Vol. 86. — P. 116–133. — DOI: [10.1016/j.dynatmoce.2019.03.005](https://doi.org/10.1016/j.dynatmoce.2019.03.005).
- Wang J., Wang S., Chen X., *et al.* Three-dimensional evolution of internal waves reflected from a submarine seamount // *Physics of Fluids*. — 2017. — Vol. 29, no. 10. — P. 106601. — DOI: [10.1063/1.4986167](https://doi.org/10.1063/1.4986167).
- Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. — Cambridge University Press, 1995. — P. 804.
- Wehausen J. V., Laitone E. V. *Surface waves*. Vol. 9. — Springer Verlag, 1960. — P. 446–778.