

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СЖИМАЕМОЙ МАГМЫ С РЕОЛОГИЕЙ МАКСВЕЛЛА В ПИТАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ВУЛКАНА. ЧАСТЬ 2. ОСЦИЛЛЯЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

А. А. Радионов<sup>1,\*</sup> 

<sup>1</sup>Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Республика Северная Осетия – Алания, Владикавказ, Россия

\* **Контакт:** Анатолий Анатольевич Радионов, aar200772@mail.ru

Представлено решение для вертикальных движений магмы в канале вулкана в рамках аналитической математической модели возникновения длиннопериодных вулканических сейсмических событий. Магма описывается моделью сжимаемого тела Максвелла. При возмущении плотности магматического расплава, например, при поступлении плотной магмы из глубоких слоев или дегазации расплава на некоторой глубине, в канале могут возникать осцилляции плотности, как реакция на это событие. Для магматического канала простейшей цилиндрической формы осцилляциям подвержена плотность магмы и две компоненты скорости движения. При этом вертикальная компонента скорости испытывает вынужденные колебания как под действием осцилляций плотности, так и под действием инициирующего возмущения. Все эти осцилляции являются гармоническими затухающими колебаниями, коэффициент затухания которых определяется временем релаксации магматического расплава, а собственная частота зависит от физических характеристик магматического расплава и геометрических размеров канала. Осцилляции плотности расплава приводят к периодическим вариациям литостатического перепада давления, что, в свою очередь, вызывает вертикальные движения расплава, наиболее амплитудные вдоль оси магматического канала. Модельное описание смещений поверхности кратера сравнивается с наблюдениями на поверхности кратера вулкана Сантьягито.

**Ключевые слова:** Длиннопериодные вулканические землетрясения, питающая система вулкана, реология магматического расплава, сжимаемое магматическое тело, аналитическая модель, вертикальные смещения кратера вулкана.

**Цитирование:** Радионов, А. А. Аналитическая модель малых колебаний сжимаемой магмы с реологией Максвелла в питающей системе вулкана. Часть 2. Осцилляции вертикальной скорости // Russian Journal of Earth Sciences. — 2024. — Т. 24. — ES3011. — DOI: 10.2205/2024es000912 — EDN: XKIQCY

## Введение

Длиннопериодные вулканические землетрясения (ДВЗ) наблюдаются практически во всех известных тектонически активных районах и считаются одним из признаков активизации вулканической деятельности. Основным методом изучения ДВЗ является анализ данных сейсмических станций, в то время как непосредственные наблюдения движений поверхности кратера при возникновении ДВЗ затруднены или часто невозможны.

Редкий пример непосредственного наблюдения движений поверхности кратера при возникновении ДВЗ для вулкана Сантьягuito, Гватемала, опубликован в [Johnson *et al.*, 2008]. На основе комплекса геофизических наблюдений показано, что выброс

<https://elibrary.ru/xkiqcy>

Получено: 16 октября 2023 г.

Принято: 22 мая 2024 г.

Опубликовано: 27 августа 2024 г.



© 2024. Автор.

газо-пепловой смеси сопровождается вертикальными смещениями поверхности кратера вулкана на 20–30 см за время выброса, наблюдаемые ускорения составляют порядка 20–30 м/с<sup>2</sup> для первого восходящего движения вблизи центра кратера, затем деформации распространяются на периферию кратера в течение нескольких секунд. Смещения распространяются радиально, фронт этих смещений имеет скорость 30–50 м/с, что слишком медленно для упругих волн в твердой или жидкой магме и слишком быстро для волн плавучести. Радиус канала вулкана оценивается в 14–100 м, вблизи поверхности порядка 100 м.

Наиболее вероятным приводным механизмом считается дегазация расплава на небольших глубинах, в результате которой нарушается литостатический баланс, смещается и разрушается верхний слой кратера и газо-пепловая смесь выбрасывается вверх, после чего поверхность кратера медленно опускается вниз. Событие сопровождается вулканическим ДВЗ, эпицентр которого регистрируется под центром кратера вулкана на глубине порядка 1000 м и можно предполагать, что и ДВЗ, и вертикальные смещения кратера есть проявления одного физического феномена. Об этом свидетельствуют спектральная согласованность, временное совпадение и корреляция между смещением купола и магнитудой ДВЗ и указывают на поднятие купола как на проявление механизма возникновения ДВЗ для вулкана Сантьягуито. Основные частоты ДВЗ расположены в интервале 0,5–2 Гц. Вертикальное движение вниз в наблюдениях не отмечается, что связывается с трудностью наблюдения из-за газо-пеплового выброса, сопровождающего смещение.

Экспериментальному и теоретическому изучению ДВЗ посвящено множество работ [для примера *Chouet, 1996; Crosson and Bame, 1985; Fujita et al., 1995; Kumagai and Chouet, 1999; 2001; Neuberg et al., 2006*]. Основным механизмом возникновения ДВЗ считается механизм резонансного возбуждения колебаний некоторой полости, заполненной газо-пепловыми компонентами магматического расплава [*Chouet, 1996*]. Это модельное описание хорошо соответствует наблюдениям и позволяет оценить размеры камеры и свойства газа. Существенным недостатком этой модели является невозможность существования газовой полости, незалечивающейся длительное время между периодами активизации вулкана. Также множество работ посвящено установлению отдельных полу-эмпирических математических закономерностей как самого явления ДВЗ, так и механизмов, приводящих к его возникновению, а также моделей движения лавовой пробки [например, *Уткин и Мельник, 2018; Шакирова и др., 2020; Girona et al., 2019; Iverson et al., 2006; Johnson et al., 2014; Ozerov et al., 2003*].

В работах [*Радионов, 2020; 2023*] представлен альтернативный механизм возникновения ДВЗ, учитывающий динамические процессы в магматическом канале вулкана с реологией тела Максвелла. Здесь сам канал является резонатором, который испытывает гармонические затухающие колебания, частота которых определяется геометрическими размерами канала и свойствами магмы, а коэффициент затухания – временем релаксации магмы. В настоящей работе рассматриваются вертикальные движения магмы согласно модельному механизму возникновения ДВЗ, изложенному в [*Радионов, 2023*] и является продолжением этой работы.

### Математическая модель

Комбинируя уравнение движения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma^{rz}}{r} \right),$$

и выражение для линейной реологической модели Максвелла  $\sigma^{ij} + \lambda(\partial \sigma^{ij} / \partial t) = \mu \epsilon^{ij}$ , несложно получить уравнение для описания малых осцилляций вертикальной скорости движения сжимаемого магматического расплава в канале вулкана:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mu}{\lambda \rho_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda \rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g \right) - \frac{g}{\lambda \rho_0} \rho, \quad (1)$$

где  $(r, \theta, z)$  – цилиндрическая система координат:  $z$  – вертикальная ось,  $r$  – радиус-вектор;  $t$  – время;  $p, \rho, \mu, E, \lambda = \mu/E$  – давление, плотность, вязкость, модуль упругости и время релаксации магмы;  $w$  – компонента скорости направленная вдоль оси цилиндра (осевая компонента), положительное значение которой соответствует направлению вверх;  $\sigma^{ij}$  – тензор напряжений, где  $(i, j) = (r, \theta, z)$ ;  $\varepsilon^{ij}$  – тензор скоростей деформации,  $g$  – постоянное ускорение свободного падения;  $(\partial p/\partial z + \rho_0 g)$  – литостатический перепад давления. Плотность магматического расплава записывается в виде суммы  $\rho = \rho_0 + \rho$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $\rho = \rho(r, z, t)$  – малое изменение плотности. Рассматривается цилиндрический канал вулкана радиусом  $R$ , заполненный магматическим расплавом с реологией Максвелла. Принимаются те же упрощающие предположения, что и в работе [Радионов, 2023].

Для определения решения уравнения (1) используются граничные и начальные условия:

$$w(r = 0) < \infty, \quad w(r = R) = 0, \quad w(r, t = 0) = \Phi(r), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(r, t = 0) = \Psi(r). \quad (2)$$

**Решения**

Решение для малого возмущения плотности  $\rho(r, t)$  показано в работе [Радионов, 2023]:

$$\rho(r, t) = \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\omega_{1,n} \frac{r}{R}\right) \left[ \varphi_n \cos(t\gamma_n) + \frac{1}{\gamma_n} \left( \psi_n + \frac{\varphi_n}{2\lambda} \right) \sin(t\gamma_n) \right]. \quad (3)$$

Здесь  $\varphi(r) = \rho(r, t = 0)$  – начальное условие для возмущения плотности;  $\psi(r) = \partial \rho / \partial t(r, t = 0)$  – начальное условие для скорости возмущения плотности;  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $\varphi_n$  – коэффициент разложения функции  $\varphi(r)$  в ряд по функциям Бесселя первого порядка  $J_1(\omega_{1,n} r/R)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\psi_n$  – коэффициент разложения функции  $\psi(r)$  в такой же ряд;

$$\gamma_n^2 = \frac{\mu}{\lambda \rho_0} \frac{\omega_{1,n}^2}{R^2} - \frac{1}{4\lambda^2}, \quad (4)$$

$\omega_{1,n}$  –  $n$ -й положительный корень уравнения  $J_1(\omega) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Выражение (4) записано для случая  $\gamma_n^2 > 0$ , когда возможно осциллирующее поведение во времени.

Уравнение (1) зависит от изменений плотности, которые приводят к нарушению локального литостатического равновесия. Величина  $\Delta p/H = \partial p/\partial z + \rho_0 g$ , где  $H$  – глубина канала, в уравнении (1) при неизменной плотности является тем перепадом давления, под действием которого магма течет вверх по каналу вулкана. Практически во всех случаях течения магмы по каналам вулканов величиной  $\Delta p/H$  можно пренебречь, однако здесь это слагаемое учитывается. Если плотность в некоторой точке радиуса канала изменяется на величину  $\rho$ , к градиенту давления добавляется величина  $\rho g$ , которая зачастую существенно превышает  $\Delta p/H$ .

Решение неоднородного уравнения (1) ищется как сумма однородного уравнения (1) с ненулевыми начальными условиями и неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными условиями. При постоянной плотности магмы в канале (при  $\rho = 0$ ), решение уравнения (1) показано в [Радионов, 2020]. Учет изменений плотности добавляет к искомому решению еще одно слагаемое. При нулевых начальных и граничных условиях (2):  $\Phi(r) \equiv 0, \Psi(r) \equiv 0$ , вертикальная компонента скорости определяется из (1) только правой частью этого уравнения. Другими словами, осцилляции вертикальной скорости индуцируются осцилляциями плотности.

Для решения (1) принимается подстановка [Полянин, 2001]:  $w(r, t) = \exp(-t/2\lambda)W(r, t)$ , которая приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\lambda \rho_0} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{1}{4\lambda^2} W + P(r, t).$$

Здесь  $P(r, t) = -\exp(t/2\lambda)\rho g/(\lambda\rho_0)$ . Решение есть [Полянин, 2001, стр. 295]:

$$W(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \Phi(\xi)G(r, \xi, t)d\xi + \int_0^R \Psi(\xi)G(r, \xi, t)d\xi + \int_0^t \int_0^R P(\xi, \tau)G(r, \xi, t - \tau)d\xi d\tau, \tag{5}$$

где функция Грина имеет вид:

$$G(r, \xi, t) = \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\xi}{R^2 J_1^2(\omega_{0,i})} J_0\left(\omega_{0,i} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\omega_{0,i} \frac{\xi}{R}\right) \frac{\sin(t\delta_i)}{\delta_i},$$

$\omega_{0,i}$  –  $i$ -й положительный корень уравнения  $J_0(\omega) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\delta_i^2 = \frac{\mu}{\lambda\rho_0} \frac{\omega_{0,i}^2}{R^2} - \frac{1}{4\lambda^2}, \tag{6}$$

отличается от (4) величиной  $\omega_{0,i}$ .

Решение (5) можно записать в виде

$$w(r, t) = -\frac{\Delta p}{4\mu H} (R^2 - r^2) + \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{\text{hom}} + \frac{2g}{\rho_0} \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{i,n}. \tag{7}$$

Здесь

$$W_n^{\text{hom}} = J_0\left(\omega_{0,n} \frac{r}{R}\right) \left[ \Phi_n \cos(\gamma_n t) + \left( \Psi_n - \frac{\Phi_n}{2\lambda} \right) \frac{1}{\gamma_n} \sin(\gamma_n t) \right],$$

$$W_{i,n} = J_0\left(\omega_{0,i} \frac{r}{R}\right) \frac{\omega_{1,n} J_0(\omega_{0,i}) J_1(\omega_{1,n}) - \omega_{0,i} J_1(\omega_{0,i}) J_0(\omega_{1,n})}{\gamma_n \delta_i J_1^2(\omega_{0,i}) (\omega_{0,i}^2 - \omega_{1,n}^2) d_{i,n}}$$

$$\times [a_{i,n} \lambda \gamma_n \delta_i \cos(\gamma_n t) + c_{i,n} \delta_i \sin(\gamma_n t) - \gamma_n \lambda \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right) (\delta_i a_{i,n} \cos(\delta_i t) + b_{i,n} \sin(\delta_i t))],$$

где для сокращения обозначено

$$d_{i,n} = \left( \frac{1}{4} + (\delta_i + \gamma_n)^2 \lambda^2 \right) \left( \frac{1}{4} + (\delta_i - \gamma_n)^2 \lambda^2 \right),$$

$$a_{i,n} = (\delta_i^2 - \gamma_n^2) \lambda^2 \varphi_n - \lambda \psi_n - \frac{\varphi_n}{4},$$

$$b_{i,n} = (\delta_i^2 - \gamma_n^2) \lambda^2 \psi_n + \delta_i^2 \lambda \varphi_n - \frac{\psi_n}{4},$$

$$c_{i,n} = (\delta_i^2 + \gamma_n^2) \lambda^3 \psi_n - \frac{(\gamma_n^2 + \delta_i^2) \lambda^2 \varphi_n}{2} + \frac{\lambda \psi_n}{4} + \frac{\varphi_n}{8}.$$

В (7) наиболее значимые амплитуды имеют три гармоники вертикальной скорости близкие к основной гармонике в разложении для плотности (3). Это видно и из структуры решения: при близких значениях  $\omega_{1,i}, \omega_{0,n}$  и  $\delta_n, \gamma_i$  знаменатель уменьшается, что приводит к увеличению амплитуды соответствующей гармоники. Другими словами, если возбуждается вторая гармоника в (3), то существенно значимые амплитуды в (7) имеют первая, вторая и третья гармоники. С ростом номера гармоники  $i$  ее амплитуда в (7) быстро уменьшается, при фиксированном номере  $n$ . Это означает, что если наблюдаются три гармоники в осцилляциях вертикальной скорости (например,  $\approx 0,5; 1,0; 2,0$  сек. для вулкана Сантьягуито), то можно предполагать, что амплитуда второй гармоники является наибольшей в возмущении плотности (3). Если же возбуждается первая гармоника в (3), то есть  $n = 1$ , то вертикальные осцилляции в (7) содержат две гармоники, первую и вторую, амплитуда которых значима, остальные

имеют заметно меньшую амплитуду. Зачастую наблюдаются две гармоники при измерениях ДВЗ во множестве вулканических центров. Конечно, эти утверждения носят оценочный характер, поскольку конкретный вид разложения (3) определяется начальными условиями и может содержать множество гармоник с разными амплитудами, но (7) описывает один из механизмов, приводящий к появлению нескольких гармоник в сигнале.

### Анализ модели и обсуждение

Решение (7) показывает, что сам канал вулкана является осциллятором, в котором могут возникать связанные с изменением плотности колебания, которые, в свою очередь, индуцируют осцилляции вертикальной скорости. Частота этих осцилляций определяется видом начальных условий (2) и начальных условий  $\varphi(r)$ ,  $\psi(r)$  для возмущения плотности магмы, свойствами магматического расплава и геометрией канала. Коэффициент затухания в (7) определяется временем релаксации магмы  $\lambda$ .

Применим модель (7) для описания наблюдений динамики движения заполняющей кратер вулкана магмы во время возникновения ДВЗ, которые сопровождаются выбросом газо-пепловой смеси, представленные в работе [Johnson et al., 2008].

Предполагаемая длина канала в 1000 м является правдоподобной оценкой длины канала, поскольку множество ДВЗ фиксируется именно на этой глубине, хотя канал может быть и длиннее. В верхних 1000 метров канала заметно содержание пузырьков и сжимаемость магматического расплава велика, что обосновывает применимость механизма колебаний сжимаемой магмы и решения (3).

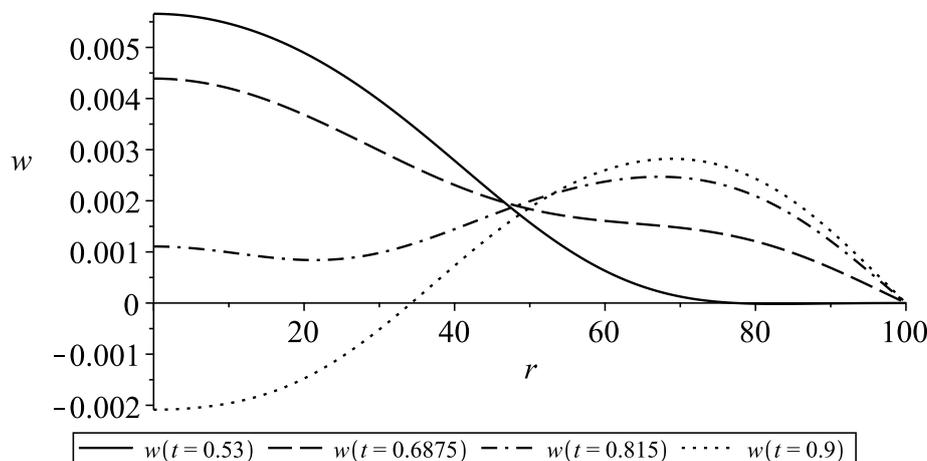
Величина  $\Delta p/H$  оценивается по расходу вулкана в соответствии с решением Пуазейля. Для магмы вулкана Сантьягуито имеется оценка плотности  $\rho_0 = 1800 \div 2400$  кг/м<sup>3</sup> со средним значением  $\rho_0 = 2100$  кг/м<sup>3</sup>. Указывается, что вулкан растет со средней скоростью 0,41 м<sup>3</sup>/с или расход  $Q \approx 0,41\rho_0 = 1025$  кг/с. Из закона Пуазейля следует  $\Delta p/H \approx 0,03$ . Эта величина соответствует тому перепаду давления, под действием которого магма течет по каналу. Эта величина пренебрежимо мала по сравнению с малым возмущением плотности  $g\rho$  при рассмотрении ДВЗ.

Оценка амплитуды возмущения плотности довольно произвольна и определяется, вероятно, процессами нуклеации/быстрого роста пузырьков на некоторой глубине в канале вулкана. При этом магма рассматривается как однофазная сжимаемая среда. Величина плотности  $\rho'_0 = 2700$  кг/м<sup>3</sup> магмы без пузырьков на глубине более 1000 м не кажется завышенной оценкой. Плотность магмы вблизи поверхности может составлять  $\rho_0 = 1800$  кг/м<sup>3</sup>. Таким образом, максимальное значение возмущения плотности может достигать  $\rho \approx 900$  кг/м<sup>3</sup> для интенсивных спонтанных процессов нуклеации и роста пузырьков, которые могут приводить к значительным возмущениям плотности. Поскольку магма поднимается медленно и все время подъема пузырьки растут, реальное значение возмущения плотности при дегазации магмы на глубине 1000 м существенно меньше. Примем оценку для  $\rho = 1 \div 100$  кг/м<sup>3</sup>.

Для вулкана Сантьягуито, Гватемала, параметры модели (7) выбирались следующими:  $\rho_0 = 2100$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 10^{7,3}$  Па·с,  $R = 100$  м,  $\lambda = 5$  с, рассматривалась первая гармоника возмущения плотности  $n = 1$  в (7), вторая сумма в (7) ограничивалась пятью первыми слагаемыми ( $i = 1, 2, \dots, 5$  в (7)), возмущение плотности  $\varphi_1 = 100$  кг/м<sup>3</sup>,  $\psi_n = 0$ ,  $\Delta p/H = 0$  Па/м, начальные условия также принимались нулевыми:  $\Phi = 0$ ,  $\Psi = 0$ . Периодически возникающие ДВЗ вулкана Сантьягуито имеют разную амплитуду, но близкие спектральные характеристики. Различная амплитуда сигнала ДВЗ может учитываться в модели (7) отличающимися значениями возмущения плотности  $\rho$ .

Вычисления по (7) показывают, что при возмущении плотности  $\rho \sim 100$  кг/м<sup>3</sup> вертикальная скорость имеет амплитуду порядка 0,015 м/с, а ускорения – порядка 0,06 м/с<sup>2</sup>. Эти значения ускорений приблизительно в 600 раз меньше наблюдаемых. Однако спектральные характеристики, структура и динамика осцилляций, скорости движения фронта деформации на поверхности кратера, предсказываемые выражением (7), хорошо соответствуют измерениям.

Радиальное распределение вертикальной скорости  $w$ , вычисленное согласно (7) в последовательные разные моменты, показано на рис. 1. Этот рисунок демонстрирует прохождение фронта волны на поверхности кратера. Движение начинается в центральной области канала ( $r = 0$ ) и распространяется на периферию.



**Рис. 1.** Радиальное распределение вертикальной скорости  $w$ , время в секундах. Значения параметров:  $n = 1$ ;  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $\rho_0 = 2100 \text{ кг/м}^3$ ;  $\mu = 10^{7,3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $R = 100 \text{ м}$ ;  $\lambda = 5 \text{ с}$ ;  $\varphi_1 = 100 \text{ кг/м}^3$ ,  $\psi_n = 0$ .

Горизонтальные скорости движения фронта волны оценивается из (7) как отношение волнового числа к частоте гармонических осцилляций:  $\delta_n R / \omega_{0,n} \approx 31,7 \text{ м/с}$  и  $\gamma_i R / \omega_{0,n} \approx 44,8 \text{ м/с}$ , вычисленные при вязкости  $\mu = 10^{7,3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ , и мало зависят от номера гармоники. Таким образом, модель (7) показывает существование двух скоростей движения фронта волны. В наблюдениях отмечают для скорости движения фронта деформации значения от 30 до 50 м/с [Johnson et al., 2008], что позволяет сделать вывод, что модель удовлетворительно описывает наблюдаемый интервал скорости радиального движения поверхности кратера. Динамика фронта волны, наблюдаемой на поверхности кратера, также качественно совпадает с измерениями: начальное самое амплитудное движение возникает в центре кратера (в точке выхода центра канала на поверхность) и далее распространяется на периферию.

Для этих оценок использовалась амплитуда возмущения плотности  $\varphi_1 = 100 \text{ кг/м}^3$ , которая составляет порядка 3% от плотности магмы без пузырьков и порядка 5% от плотности магмы, содержащей пузырьки. Однако этого значения возмущения плотности недостаточно, чтобы объяснить наблюдающиеся вертикальные ускорения поверхности кратера (порядка  $20\text{--}30 \text{ м/с}^2$ ), для объяснения которых требуются возмущения плотности, приблизительно в 600 раз превосходящие выбранное значение. Даже если использовать максимальную оценку для возмущения плотности  $\varphi_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$  требуется усиление сейсмического сигнала в 60 раз, чтобы описать наблюдающиеся ускорения на поверхности кратера. При большой скорости возникновения возмущений величина  $\psi_n$  значительна и граничное условие  $\psi(r)$  может объяснить наблюдательные данные. Механизмы, приводящие к усилению сейсмического сигнала в каналах вулканов, существуют и могут быть следующими.

В столбе пузырьковой магмы действуют физические процессы усиления сейсмического сигнала, которые происходят за счет энергии пузырьков, что обсуждается в [Kurzon et al., 2005; 2011]. Подробный учет этих явлений возможен в рамках детальных численных моделей прохождения сейсмических волн в пузырьковой магме. Величина усиления сейсмического сигнала зависит от везикулярности и газонасыщенности магмы, глубины канала и, по всей видимости, является уникальной характеристикой для каждого вулкана. Другим возможным механизмом является усиление вертикального движения верхних слоев магматического канала вулкана Сантьягuito, связанное с нелинейным трением лавовой пробки со стенками канала, показанное в работе [Iverson et al.,

2006]. Также представленный механизм может являться триггером, инициирующим вертикальные движения в моделях взаимодействия лавовой пробки с газо-насыщенной областью под ней [Уткин и Мельник, 2018; Girona et al., 2019; Johnson et al., 2014]. Также возможно усиление сейсмического сигнала в геометрически сложных магматических каналах и в связи с нелинейностью закономерностей распространения сейсмического сигнала в реологически сложных средах.

Гармонические колебания (7) состоят из нескольких гармоник, первые несколько осцилляций могут усиливаться, а затем затухают. Также вертикальные смещения (7) канала вулкана имеют две или три гармоники в случае, если осцилляции плотности возбуждаются с одной гармоникой. В сейсмическом сигнале ДВЗ зачастую отмечаются также две-три гармоники, что позволяет полагать, что решение (7) не противоречит наблюдениям.

Модельные вертикальные смещения (7) не зависят от вертикальной координаты. На поверхности кратера они наблюдаются непосредственно, а на некоторой глубине порядка 1000 м, где магма уже не является существенно сжимаемой, эти осцилляции деформируют глубокие слои магмы. Эти деформации являются гармоническими и могут быть интерпретированы как одна единственная сила, которая формирует соответствующий механизм источника этих деформаций. Для ДВЗ зачастую применяется механизм источника, связанный с действием одной силы [например, Nishimura et al., 1995; Ohmi and Obara, 2002].

Экспериментальные исследования [Анфилогов и др., 2005; Лебедев и Хитаров, 1979; Персиков, 1984; Gonnermann and Manga, 2007] показывают, что реология магмы не соответствует линейной модели Максвелла, а является более сложной. Часто принимается зависимость вязкости магмы от первого и второго инвариантов тензора скоростей деформации [например, Бармин и др., 2012]. Подобную экспериментально установленную зависимость вязкости от скоростей деформации можно использовать и в рамках линейной модели Максвелла, что может уточнить получаемые результаты, однако, в рамках аналитического рассмотрения этого сделать не удается.

При помощи выражения для кинетической энергии вертикального движения столба магмы в канале  $\rho_0 \pi H R^2 w^2 / 2 \approx 8 \cdot 10^4$  Дж, где  $\rho_0 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $H = 1000$  м,  $R = 100$  м,  $w = 0,005$  м/с (рис. 1), получается энергетическая оценка для ДВЗ, при условии, что заметные скорости наблюдаются только вблизи оси канала, или магнитуда  $4 \div 5$ , и также зависит от возмущения плотности. Наблюдающиеся магнитуды ДВЗ на Сантьягuito составляют  $1,8 \div 5,6$  [Gottschämmer et al., 2021; Lamb et al., 2019], а магнитуда самых сильных сейсмических событий превышает 6. Полученная оценка соответствует интервалу магнитуд наблюдающихся ДВЗ.

Предлагаемая модель удовлетворительно объясняет наблюдаемые спектральные характеристики ДВЗ для вулкана Сантьягuito. Также частоты и коэффициенты затухания ДВЗ, свойства магмы и геометрические характеристики канала находятся в удовлетворительном соответствии с имеющимися оценками этих величин. Это соответствие как качественное, так и количественное. В результате применения модели (7) можно сделать вывод, что применение линейной модели Максвелла оказывается удовлетворительным для описания ДВЗ и может продуктивно использоваться, по крайней мере, в некоторых случаях.

### Заключение

В литературе представлено множество математических моделей возможных физических механизмов, которые привлекаются для объяснения многообразия различных проявлений вулканической активности, в частности ДВЗ, происходящих при активизации вулкана и его извержения. Математическая модель одного из возможных механизмов, основанного на решении уравнений сохранения, с учетом сложной реологии магмы и ее сжимаемости, представлена в настоящей работе. Модель показывает, что ДВЗ могут быть объяснены колебаниями самой магматической питающей системы вулкана, в частности его канала или боковых рукавов. Наблюдающаяся динамика

горизонтальных деформаций поверхности кратера при ДВЗ для вулкана Сантьягуито удовлетворительно описывается представленной моделью как проявление осцилляций канала вулкана.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность рецензентам журнала «Russian Journal of Earth Sciences» за полезное обсуждение и ценные замечания.

### Список литературы

- Анфилогов В. Н., Быков В. Н., Осипов А. А. Силикатные расплавы. — Москва : Наука, 2005. — 357 с.
- Бармин А. А., Мельник О. Э., Скульский О. И. Модель стационарного неизотермического течения магмы в канале вулкана с учетом скольжения на границе // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 354–358. — DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.3.42](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.42).
- Лебедев Е. Б., Хитаров Н. И. Физические свойства магматических расплавов. — Москва : Наука, 1979. — 200 с.
- Персиков Э. С. Вязкость магматических расплавов. — Москва : Наука, 1984. — 159 с.
- Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — Москва : Физико-математическая литература, 2001. — 576 с.
- Радионов А. А. О малых колебаниях магмы в питающей системе вулкана // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2020. — 1 (205). — С. 78–84. — DOI: [10.18522/1026-2237-2020-1-78-84](https://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-1-78-84).
- Радионов А. А. Аналитическая модель малых колебаний сжимаемой магмы с реологией Максвелла в питающей системе вулкана. Часть 1. Осцилляции плотности // Russian Journal of Earth Sciences. — 2023. — Т. 23. — ES2005. — DOI: [10.2205/2023ES000845](https://doi.org/10.2205/2023ES000845).
- Уткин И. С., Мельник О. Э. Динамика взрывной дегазации вулкана // Труды математического института им. В. А. Стеклова. — 2018. — Т. 300, № 01. — С. 190–196. — DOI: [10.1134/s0371968518010156](https://doi.org/10.1134/s0371968518010156).
- Шакирова А. А., Фирстов П. П., Паровик Р. И. Феноменологическая модель генерации землетрясений сейсмического режима «Drumbeats», сопровождавших извержение вулкана Кизимен в 2011–2012 гг. // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. — 2020. — Т. 33, № 4. — С. 86–101. — DOI: [10.26117/2079-6641-2020-33-4-86-101](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-33-4-86-101).
- Chouet B. A. Long-period volcano seismicity: its source and use in eruption forecasting // Nature. — 1996. — Vol. 380, no. 6572. — P. 309–316. — DOI: [10.1038/380309a0](https://doi.org/10.1038/380309a0).
- Crosson R. S., Bame D. A. A spherical source model for low frequency volcanic earthquakes // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 1985. — Vol. 90, B12. — P. 10237–10247. — DOI: [10.1029/JB090iB12p10237](https://doi.org/10.1029/JB090iB12p10237).
- Fujita E., Ida Y., Oikawa J. Eigen oscillation of a fluid sphere and source mechanism of harmonic volcanic tremor // Journal of Volcanology and Geothermal Research. — 1995. — Vol. 69, no. 3/4. — P. 365–378. — DOI: [10.1016/0377-0273\(95\)00027-5](https://doi.org/10.1016/0377-0273(95)00027-5).
- Girona T., Caudron C., Huber C. Origin of Shallow Volcanic Tremor: The Dynamics of Gas Pockets Trapped Beneath Thin Permeable Media // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2019. — Vol. 124, no. 5. — P. 4831–4861. — DOI: [10.1029/2019JB017482](https://doi.org/10.1029/2019JB017482).
- Gonnermann H. M., Manga M. The Fluid Mechanics Inside a Volcano // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 39, no. 1. — P. 321–356. — DOI: [10.1146/annurev.fluid.39.050905.110207](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110207).
- Gottschämmer E., Rohnacher A., Carter W., *et al.* Volcanic emission and seismic tremor at Santiaguito, Guatemala: New insights from long-term seismic, infrasound and thermal measurements in 2018–2020 // Journal of Volcanology and Geothermal Research. — 2021. — Vol. 411. — P. 107154. — DOI: [10.1016/j.jvolgeores.2020.107154](https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2020.107154).
- Iverson R. M., Dzurisin D., Gardner C. A., *et al.* Dynamics of seismogenic volcanic extrusion at Mount St Helens in 2004–05 // Nature. — 2006. — Vol. 444, no. 7118. — P. 439–443. — DOI: [10.1038/nature05322](https://doi.org/10.1038/nature05322).
- Johnson J. B., Lees J. M., Gerst A., *et al.* Long-period earthquakes and co-eruptive dome inflation seen with particle image velocimetry // Nature. — 2008. — Vol. 456, no. 7220. — P. 377–381. — DOI: [10.1038/nature07429](https://doi.org/10.1038/nature07429).
- Johnson J. B., Lyons J. J., Andrews B. J., *et al.* Explosive dome eruptions modulated by periodic gas-driven inflation // Geophysical Research Letters. — 2014. — Vol. 41, no. 19. — P. 6689–6697. — DOI: [10.1002/2014GL061310](https://doi.org/10.1002/2014GL061310).
- Kumagai H., Chouet B. A. The complex frequencies of long-period seismic events as probes of fluid composition beneath volcanoes // Geophysical Journal International. — 1999. — Vol. 138, no. 2. — P. F7–F12. — DOI: [10.1046/j.1365-246X.1999.00911.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1999.00911.x).
- Kumagai H., Chouet B. A. The dependence of acoustic properties of a crack on the resonance mode and geometry // Geophysical Research Letters. — 2001. — Vol. 28, no. 17. — P. 3325–3328. — DOI: [10.1029/2001GL013025](https://doi.org/10.1029/2001GL013025).
- Kurzon I., Lyakhovskiy V., Lensky N. G., *et al.* Forcing of seismic waves travelling through a bubbly magma // AGU Fall Meeting Abstracts. Vol. 2005. — New York : AGU, 2005.

- Kurzon I., Lyakhovsky V., Navon O., *et al.* Pressure waves in a supersaturated bubbly magma: Pressure waves and bubbly magma // *Geophysical Journal International*. — 2011. — Vol. 187, no. 1. — P. 421–438. — DOI: [10.1111/j.1365-246X.2011.05152.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05152.x).
- Lamb O. D., Lamur A., Díaz-Moreno A., *et al.* Disruption of Long-Term Effusive-Explosive Activity at Santiaguito, Guatemala // *Frontiers in Earth Science*. — 2019. — Vol. 6. — DOI: [10.3389/feart.2018.00253](https://doi.org/10.3389/feart.2018.00253).
- Neuberg J. W., Tuffen H., Collier L., *et al.* The trigger mechanism of low-frequency earthquakes on Montserrat // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. — 2006. — Vol. 153, no. 1/2. — P. 37–50. — DOI: [10.1016/j.jvolgeores.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2005.08.008).
- Nishimura T., Hamaguchi H., Ueki S. Source mechanisms of volcanic tremor and low-frequency earthquakes associated with the 1988-89 eruptive activity of Mt Tokachi, Hokkaido, Japan // *Geophysical Journal International*. — 1995. — Vol. 121, no. 2. — P. 444–458. — DOI: [10.1111/j.1365-246X.1995.tb05725.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1995.tb05725.x).
- Ohmi S., Obara K. Deep low-frequency earthquakes beneath the focal region of the Mw 6.7 2000 Western Tottori earthquake // *Geophysical Research Letters*. — 2002. — Vol. 29, no. 16. — DOI: [10.1029/2001GL014469](https://doi.org/10.1029/2001GL014469).
- Ozerov A., Ispolatov I., Lees J. Modeling Strombolian eruptions of Karymsky volcano, Kamchatka, Russia // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. — 2003. — Vol. 122, no. 3/4. — P. 265–280. — DOI: [10.1016/S0377-0273\(02\)00506-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0273(02)00506-1).

# ANALYTICAL MODEL OF SMALL FLUCTUATIONS OF COMPRESSIBLE MAGMA WITH MAXWELL RHEOLOGY IN THE FEEDING SYSTEM OF A VOLCANO. PART 2. OSCILLATIONS OF VERTICAL VELOCITY

A. A. Radionoff<sup>1,\*\*</sup> 

<sup>1</sup>Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of the RAS, Vladikavkaz, Russia

**\*\*Correspondence to:** Anatoly Radionoff, aar200772@mail.ru.

The analytical solution for vertical magma movements in a volcanic conduit within the occurrence of low-frequency volcanic seismic events is presented. Magma is described by Maxwell's compressible body model. When the density of the magmatic melt is disturbed, for example, when dense magma enters from deep layers or the melt degasses at a certain depth, density oscillations may occur in the channel as a reaction to this event. For the magma conduit of the simplest cylindrical shape, the magma density and two components of the velocity of movement are subject to oscillations. In this case, the vertical component of the velocity experiences forced oscillations, both under the influence of density oscillations and under the influence of the initiating disturbance. All these oscillations are harmonic damped oscillations, the damping coefficient of which is determined by the relaxation time of the magmatic melt, and the natural frequency depends on the physical characteristics of the magmatic melt and the geometric dimensions of the conduit. Melt density oscillations lead to periodic variations in the lithostatic pressure drop, which in turn causes vertical movements of the melt, the most amplitude along the axis of the magma conduit. The model is used to describe crater surface displacements observed on the surface of the Santiaguito volcano crater.

**Keywords:** Volcanic low-frequency earthquakes, volcano feeding system, Maxwell rheology, compressible magmatic body, analytical model.

**Citation:** Radionoff, A. A. (2024), Analytical Model of Small Fluctuations of Compressible Magma With Maxwell Rheology in the Feeding System of a Volcano. Part 2. Oscillations of Vertical Velocity, *Russian Journal of Earth Sciences*, 24, ES3011, <https://doi.org/10.2205/2024ES000912>, EDN: XKIQCY

Received: 16 October 2023

Accepted: 22 May 2024

Published: 27 August 2024



© 2024. The Authors.

## References

- Anfilogov V. N., Bykov V. N., Osipov A. A. Silicate melts. — Moscow : Nauka, 2005. — P. 357.
- Barmin A., Melnik O., Skulskiy O. Model of a non-isothermal stationary magma flow in a volcanic conduit taking into account slip boundary conditions at the conduit wall // *Computational Continuum Mechanics*. — 2012. — Vol. 5, no. 2. — P. 354–358. — DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.3.42](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.42).
- Chouet B. A. Long-period volcano seismicity: its source and use in eruption forecasting // *Nature*. — 1996. — Vol. 380, no. 6572. — P. 309–316. — DOI: [10.1038/380309a0](https://doi.org/10.1038/380309a0).
- Crosson R. S., Bame D. A. A spherical source model for low frequency volcanic earthquakes // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 1985. — Vol. 90, B12. — P. 10237–10247. — DOI: [10.1029/JB090iB12p10237](https://doi.org/10.1029/JB090iB12p10237).
- Fujita E., Ida Y., Oikawa J. Eigen oscillation of a fluid sphere and source mechanism of harmonic volcanic tremor // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. — 1995. — Vol. 69, no. 3/4. — P. 365–378. — DOI: [10.1016/0377-0273\(95\)00027-5](https://doi.org/10.1016/0377-0273(95)00027-5).

- Girona T., Caudron C., Huber C. Origin of Shallow Volcanic Tremor: The Dynamics of Gas Pockets Trapped Beneath Thin Permeable Media // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 2019. — Vol. 124, no. 5. — P. 4831–4861. — DOI: [10.1029/2019JB017482](https://doi.org/10.1029/2019JB017482).
- Gonnermann H. M., Manga M. The Fluid Mechanics Inside a Volcano // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2007. — Vol. 39, no. 1. — P. 321–356. — DOI: [10.1146/annurev.fluid.39.050905.110207](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110207).
- Gottschämmer E., Rohnacher A., Carter W., *et al.* Volcanic emission and seismic tremor at Santiaguito, Guatemala: New insights from long-term seismic, infrasound and thermal measurements in 2018-2020 // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. — 2021. — Vol. 411. — P. 107154. — DOI: [10.1016/j.jvolgeores.2020.107154](https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2020.107154).
- Iverson R. M., Dzurisin D., Gardner C. A., *et al.* Dynamics of seismogenic volcanic extrusion at Mount St Helens in 2004-05 // *Nature*. — 2006. — Vol. 444, no. 7118. — P. 439–443. — DOI: [10.1038/nature05322](https://doi.org/10.1038/nature05322).
- Johnson J. B., Lees J. M., Gerst A., *et al.* Long-period earthquakes and co-eruptive dome inflation seen with particle image velocimetry // *Nature*. — 2008. — Vol. 456, no. 7220. — P. 377–381. — DOI: [10.1038/nature07429](https://doi.org/10.1038/nature07429).
- Johnson J. B., Lyons J. J., Andrews B. J., *et al.* Explosive dome eruptions modulated by periodic gas-driven inflation // *Geophysical Research Letters*. — 2014. — Vol. 41, no. 19. — P. 6689–6697. — DOI: [10.1002/2014GL061310](https://doi.org/10.1002/2014GL061310).
- Kumagai H., Chouet B. A. The complex frequencies of long-period seismic events as probes of fluid composition beneath volcanoes // *Geophysical Journal International*. — 1999. — Vol. 138, no. 2. — F7–F12. — DOI: [10.1046/j.1365-246X.1999.00911.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1999.00911.x).
- Kumagai H., Chouet B. A. The dependence of acoustic properties of a crack on the resonance mode and geometry // *Geophysical Research Letters*. — 2001. — Vol. 28, no. 17. — P. 3325–3328. — DOI: [10.1029/2001GL013025](https://doi.org/10.1029/2001GL013025).
- Kurzon I., Lyakhovskiy V., Lensky N. G., *et al.* Forcing of seismic waves travelling through a bubbly magma // *AGU Fall Meeting Abstracts*. Vol. 2005. — New York : AGU, 2005.
- Kurzon I., Lyakhovskiy V., Navon O., *et al.* Pressure waves in a supersaturated bubbly magma: Pressure waves and bubbly magma // *Geophysical Journal International*. — 2011. — Vol. 187, no. 1. — P. 421–438. — DOI: [10.1111/j.1365-246X.2011.05152.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05152.x).
- Lamb O. D., Lamur A., Díaz-Moreno A., *et al.* Disruption of Long-Term Effusive-Explosive Activity at Santiaguito, Guatemala // *Frontiers in Earth Science*. — 2019. — Vol. 6. — DOI: [10.3389/feart.2018.00253](https://doi.org/10.3389/feart.2018.00253).
- Lebedev E. B., Khitarov N. I. Physical properties of magmatic melts. — Moscow : Nauka, 1979. — P. 200.
- Neuberg J. W., Tuffen H., Collier L., *et al.* The trigger mechanism of low-frequency earthquakes on Montserrat // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. — 2006. — Vol. 153, no. 1/2. — P. 37–50. — DOI: [10.1016/j.jvolgeores.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2005.08.008).
- Nishimura T., Hamaguchi H., Ueki S. Source mechanisms of volcanic tremor and low-frequency earthquakes associated with the 1988-89 eruptive activity of Mt Tokachi, Hokkaido, Japan // *Geophysical Journal International*. — 1995. — Vol. 121, no. 2. — P. 444–458. — DOI: [10.1111/j.1365-246X.1995.tb05725.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1995.tb05725.x).
- Ohmi S., Obara K. Deep low-frequency earthquakes beneath the focal region of the Mw 6.7 2000 Western Tottori earthquake // *Geophysical Research Letters*. — 2002. — Vol. 29, no. 16. — DOI: [10.1029/2001GL014469](https://doi.org/10.1029/2001GL014469).
- Ozerov A., Ispolatov I., Lees J. Modeling Strombolian eruptions of Karymsky volcano, Kamchatka, Russia // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. — 2003. — Vol. 122, no. 3/4. — P. 265–280. — DOI: [10.1016/S0377-0273\(02\)00506-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0273(02)00506-1).
- Persikov E. S. Viscosity of magmatic melts. — Moscow : Nauka, 1984. — P. 159.
- Polyanin A. D. Handbook of linear equations of mathematical physics. — Moscow : Physical, Mathematical Literature, 2001. — P. 576.
- Radionoff A. A. On Small Oscillations Inside a Volcano Feeding System // *University News. North-Caucasian Region. Natural Sciences Series*. — 2020. — 1 (205). — P. 78–84. — DOI: [10.18522/1026-2237-2020-1-78-84](https://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-1-78-84).
- Radionoff A. A. Analytical model of small fluctuations of compressible magma with Maxwell rheology in the feeding system of a volcano. Part 1. Density oscillations // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2023. — Vol. 23. — ES2005. — DOI: [10.2205/2023ES000845](https://doi.org/10.2205/2023ES000845).
- Shakirova A. A., Firstov P. P., Parovik R. I. Phenomenological model of the generation of the seismic mode «Drumbeats» earthquakes accompanying the eruption of Kizimen volcano in 2011-2012 // *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. — 2020. — Vol. 33, no. 4. — P. 86–101. — DOI: [10.26117/2079-6641-2020-33-4-86-101](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-33-4-86-101).
- Utkin I. S., Melnik O. E. Dynamics of explosive degassing of a volcano // *Proceedings of the Mathematical Institute V. A. Steklova*. — 2018. — Vol. 300, no. 01. — P. 190–196. — DOI: [10.1134/s0371968518010156](https://doi.org/10.1134/s0371968518010156).