

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В. Г. Гетманов^{1,2,*} и В. А. Пилипенко^{1,2} 

¹Геофизический центр Российской академии наук, Москва, Российская Федерация

²Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Российская Федерация

* **Контакт:** Виктор Григорьевич Гетманов, vgetm2015@yandex.ru

Аннотация: Разработана математическая технология цифровой обработки геофизических сигналов для оценивания нестационарных параметрических функций. Использовались двухэтапные аппроксимации с локальными моделями на первом и моделями взвешенных аппроксимационных усреднений на втором этапе. Сформированы алгоритмы вычисления оценок параметрических амплитудных и частотных функций, функций инкрементов/декрементов и частотных дисперсий. Предложены формулы погрешностей для оценок параметрических функций пульсаций. Реализованы примеры применения технологии для модельных и экспериментальных наблюдений. Продемонстрированы возможности технологии, позволяющие вычислить оценки функций частоты и функций производной частоты для геомагнитных пульсаций типа «жемчужины».

Ключевые слова: геофизические сигналы, геомагнитные пульсации, нестационарные параметры, двухэтапная аппроксимация, локальные аппроксимации, взвешенное усреднение.

Цитирование: Гетманов В. Г. и Пилипенко В. А. Математическая технология оценивания параметрических функций нестационарных геофизических сигналов // Russian Journal of Earth Sciences. — 2026. — Т. 26. — ES1013. — DOI: 10.2205/2026es001087 — EDN: URQEWY

1. Введение

Геофизические сигналы, наблюдаемые в сейсмических, атмосферных, электромагнитных полях, зачастую являются существенно нестационарными. Оценивание переменных во времени параметров таких сигналов представляет собой достаточно сложную проблему из-за того, что на возможно малых по длительности интервалах наблюдений могут реализовываться значительные изменения параметрических функций во времени. Данное обстоятельство обуславливает большие погрешности в оценках.

Математическая технология, которая предлагается в статье, обеспечивает решения задач получения оценок функций нестационарных амплитуд, частот, инкрементов/декрементов колебаний и частотных дисперсий геофизических сигналов.

Инкременты/декременты [Savel'ev, 1979] характеризуют нарастание или затухание амплитуд колебаний. Вычисление указанных характеристик важно для определения диссипативных свойств сред, установления механизма неустойчивости волн в околоземной плазме и условий разделения мягкого и жесткого механизмов возбуждения колебаний в нелинейных системах и др. Как правило, затухание/нарастание амплитуды колебаний рассматривается на временах не превышающих нескольких единиц-десятков периодов.

Частотная дисперсия [Алешкевич, 2011] обуславливается различием фазовых скоростей линейных волн в зависимости от их частоты, реализует расширение спектров при прохождении геофизических сигналов через среды и определяется значениями разбросов частотной функции относительно средней частоты. Дисперсия волн приводит

<https://elibrary.ru/URQEWY>

Получено: 26 августа 2025 г.

Принято: 18 ноября 2025 г.

Опубликовано: 7 апреля 2026 г.



© 2026. Коллектив авторов.

к тому, что волновое возмущение произвольной негармонической формы претерпевает изменения (диспергирует) по мере его распространения. Частотная дисперсия может быть вызвана, либо нестационарностью источника сигнала, либо свойствами среды распространения. Частотная дисперсия проявляется как изменение центральной частоты сигнала со временем. Вычисление частотной дисперсии даёт возможность определений природы колебаний, характеристик и структуры сред распространения геофизических сигналов.

В настоящее время отсутствуют надёжные вычислительные методы, ориентированные на анализ нестационарных сигналов с отмеченными свойствами. Наиболее часто применяемый метод анализа рассматриваемых сигналов базируется на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) [Афанасьев и др., 2019], который, однако, плохо приспособлен для нестационарных случаев, вследствие его ограниченной разрешающей способности. Достаточно распространённый спектрально-временной анализ на основе преобразования Вигнера [Time-Frequency Analysis, 2013], по-существу, использующий ДПФ, имеет погрешности в оценках параметров примерно такого же порядка, что и погрешности ДПФ. Методы вейвлет-анализа [Mallat, 1999] могут неудачно срабатывать, когда используемые материнские вейвлеты значительно функционально отличается от исходного сигнала. При реализации перечисленных методов может теряться важная информация о свойствах и характеристиках сигналов.

Настоящая статья подразделяется на две части. В первой части рассматривается в общем виде оценивание параметров нестационарных геофизических сигналов. Реализуются двухэтапные аппроксимации, базирующиеся на локальных аппроксимационных моделях первого этапа и локальных моделях взвешенных аппроксимационных усреднений второго этапа. Разработанная математическая технология дополняет традиционные методы цифровой обработки нестационарных сигналов. Во второй части приводятся примеры апробационного оценивания нестационарных параметров модельных и экспериментальных геомагнитных пульсаций типа «жемчужины».

Предложенная математическая технология в статье апробируется на геофизических сигналах типа геомагнитные пульсации в форме «жемчужин». Разработанная технология может быть применима для многих вариантов геофизических сигналов, например, к поверхностным сейсмическим волнам Релея, электромагнитным излучениям типа хоров в магнитосфере Земли и т.д. Данная технология является существенно универсальной и может быть использована для сигналов механических колебаний, радиосигналов, биомедицинских сигналов и др. На основе построения вариантов локальных аппроксимационных моделей, возможен учёт трендов, частотных модуляций и небелых шумов в задачах оценивания параметров для наблюдений нестационарных колебательных сигналов.

2. Постановка задачи оценивания параметрических функций для нестационарных геофизических сигналов

Основная идея предлагаемых здесь локальных аппроксимаций состоит в разбиении общего времени наблюдений на локальные интервалы, построении на них аппроксимационных моделей и оценивании параметрических функций отдельно для каждого локального интервала. Отказ от построения общей модели упрощает задачу оценивания. Главное условие успешного применения локальных аппроксимаций заключается в выборе размеров локальных интервалов, которые следует назначать таким образом, чтобы для них оценки параметров были бы устойчивыми – с мало меняющимися функционалами эффективности при изменениях размеров локальных интервалов, примерно, на 5–10%, как следует из рекомендаций практики локальных аппроксимаций.

Локальные аппроксимации достаточно широко используются в практике цифровой обработки наблюдений нестационарных сигналов. Варианты математических технологий локальных аппроксимаций детально описаны в [Катковник, 1985; Katkovnik et al., 2006; Makur, 2015]. В работах [Анижеев и др., 2019; Грибанова и Скурухина, 2020; Bioucas-Dias et al., 2008; Fung et al., 2022; Nie et al., 2014] содержатся описания приложе-

ний, связанных с локальными аппроксимационными моделями для предметной области настоящей статьи. В публикациях [Гетманов и др., 2016, 2018] приведены результаты исследований геомагнитных пульсаций на основе моделей локальных аппроксимаций. Обзор в [Гетманов, 2019] содержит описания вариантов локальных аппроксимаций для цифровой обработки геомагнитных наблюдений. Предлагаемая здесь статья является существенным развитием [Getmanov et al., 2025].

Постановка задачи оценивания параметрических функций для нестационарных геофизических сигналов базируется на оптимизационных решениях [Гетманов, 2011, 2021]. Пусть $Y(Ti)$ – наблюдения геофизического сигнала, T – шаг дискретизации, $i = 1, \dots, N_f$, TN_f – общее время наблюдений. Задаётся известного вида модельная функция $y_M(c_0, Ti) = y_M(p(c_0, Ti), c_0, Ti)$, зависящая от вектора параметров $c_0^T = (c_{0,1}, c_{0,2}, \dots, c_{0,n_0})$ размерностью $(n_0, 1)$ и с ограничениями $c_0 \in C_0$; нестационарные параметры определяются в виде векторной функции известного вида $p^T(c_0, Ti) = (p_1(c_0, Ti), \dots, p_{l_0}(c_0, Ti))$, где l_0 – число параметрических функций. Оценивание вектора параметров производится из задачи минимизации введённой нормы $F_0(Y, c_0)$, которая определяет меру близости наблюдений $Y(Ti)$ и модельной функции $y_M(c_0, Ti)$ $F_0(Y, c_0) = \|Y(Ti) - y_M(c_0, Ti)\|$.

Далее, введённая норма формируется в виде квадратичной суммы и записывается общий вид задачи нахождения оптимального вектора параметров c_0^o

$$F_0(Y, c_0) = \sum_{i=1}^{N_f} (Y(Ti) - y_M(c_0, Ti))^2, \quad c_0^o = \arg \left\{ \min_{c_0 \in C} F_0(Y, c_0) \right\}. \quad (1)$$

Оценки параметрических функций сигнала вычисляются вполне естественным образом

$$p_l^o(Ti) = p_l(c_0^o, Ti), \quad l = 1, \dots, l_0. \quad (2)$$

Однако, большая размерность вектора параметров модели c_0 приводит к тому, что решение оптимизационной задачи (1) становится проблематичным.

Необходимо сделать отдельные замечания относительно оценивания функций инкрементов/декрементов $\gamma^o(Ti)$ и частотных дисперсий $\sigma_{FD}^{2,o}(Ti)$. Прежде всего, для сигнала $Y(Ti)$, $i = 1, \dots, N_f$ с целью получения решения задачи оценивания следует произвести полосовую фильтрацию и сформировать сигнал $Y_F(Ti)$, в котором устранены низкочастотные и высокочастотные составляющие. Оценивание указанных функций с учётом фильтрации строится:

1. для $\gamma^o(Ti)$ – функций инкрементов/декрементов – на нахождении оценок временных координат t_k^o и величин положительных локальных максимумов $A(t_k^o)$, принимаемых, как амплитуды пульсаций, где k – порядковые номера локальных максимумов, $k = 1, \dots, k_0$, k_0 – число локальных максимумов для $Y_F(Ti)$, $i = 1, \dots, N_f$ и вычисления на основе найденных оценок значений функции $\gamma^o(Ti)$;
2. для $\sigma_{FD}^{2,o}(Ti)$ – функций частотных дисперсий – на нахождении оценок координат нулевых значений t_n^o для $Y_F(Ti)$, $i = 1, \dots, N_f$, n – порядковые номера, $n = 1, \dots, n_0$, n_0 – число нулевых значений и вычисления на их основе оценок функции $\sigma_{FD}^{2,o}(Ti)$.

3. Оценивание параметрических функций на основе построения модельных локальных аппроксимаций и взвешенных аппроксимационных усреднений

Для математической технологии оценивания параметрических функций нестационарных геофизических сигналов воспользуемся двухэтапными аппроксимационными процедурами [Гетманов, 2011, 2021].

Рассмотрим первый этап аппроксимации для оценивания параметрических функций путём построения локальных аппроксимационных моделей. Назначим локальные интервалы размером N , пусть $N_{s_0} = N_{f_1}$, где s_0 – число локальных интервалов, $N_{f_1} \leq N_f$ и $N \ll N_{f_1}$. Образует локальные интервалы с границами $N_{1,s} \leq i < N_{2,s}$, $N_{1,s} = 1 + N_{(s-1)}$, $N_{2,s} = N_{1,s} + N - 1$, s – номера локальных интервалов, $s = 1, \dots, s_0$. Положим, что локальные аппроксимационные модели первого этапа примут вид $y_{M_1}(c_s, Ti)$,

где векторы локальных параметров $c_s^T = (c_{(s,1)}, c_{(s,2)}, \dots, c_{(s,n)})$ имеют размерности $(n, 1)$, $n \ll n_0$.

Введём обозначения для векторов модельных локальных параметров входящих линейно и нелинейно в выражение модели, $c_s^T = (c_{L_s}^T, c_{N_s}^T)$, $c_{L_s}^T = (c_{L_{1,s}}, c_{L_{2,s}}, \dots, c_{L_{n_1,s}})$, $c_{N_s}^T = (c_{N_{1,s}}, c_{N_{2,s}}, \dots, c_{N_{n_2,s}})$, $c_{N_s} \in C$, $s = 1, \dots, s_0$, $n = n_1 + n_2$. Введём базисные функции с нелинейными параметрами $\varphi_1(c_{N_s}, Ti)$, $\varphi_2(c_{N_s}, Ti), \dots, \varphi_{n_1}(c_{N_s}, Ti)$. Запишем локальные модели в форме скалярных произведений $y_{M_1}(c_{L_s}, c_{N_s}, Ti) = c_{L_s}^T \varphi(c_{N_s}, Ti)$ и сформируем функционал $F(c_L, c_N, Y)$

$$F(c_L, c_N, Y) = \sum_{s=1}^{s_0} F(c_{L_s}, c_{N_s}, Y_s), \quad F(c_{L_s}, c_{N_s}, Y_s) = \sum_{i=N_{1,s}}^{N_{2,s}} (Y(Ti) - c_{L_s}^T \varphi(c_{N_s}, Ti))^2,$$

где Y_s – вектор локальных наблюдений размерности $(N, 1)$ для s -ого интервала.

Локальные модели являются нелинейными по части параметров. Для решения задачи оптимизации на первом этапе фиксируем нелинейные параметры c_{N_s} ; найдём частично оптимальные линейные параметры $c_{L_s}^o(c_{N_s})$ на основе решения системы уравнений

$$c_{L_s}^o(c_{N_s}) = A(c_{N_s})^{-1} b(c_{N_s}), \tag{3}$$

где элементы матрицы $A(c_{N_s})$ и вектора $b(c_{N_s})$ вычислим по следующим формулам

$$a(n_{21}, n_{22}, c_{N_s}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{n_{21}}(c_{N_s}, Ti) \varphi_{n_{22}}(c_{N_s}, Ti), \quad b(n_{21}, c_{N_s}) = \sum_{i=1}^N \varphi_{n_{21}}(c_{N_s}, Ti) Y(Ti),$$

$n_{21} = 1, \dots, n_2$, $n_{22} = 1, \dots, n_2$. Образует частично оптимальные функционалы

$$F(c_{L_s}^o(c_{N_s}), Y_s) = \sum_{i=N_{1,s}}^{N_{2,s}} Y^2(Ti) - c_{L_s}^o(c_{N_s})^T b(c_{N_s}). \tag{4}$$

Определим оценки нелинейных локальных параметров $c_{N_s}^o$ путём оптимизации функционалов $F(c_{L_s}^o(c_{N_s}), Y_s)$ (4) на основе минимизационного поиска с учётом ограничений. Оценивание $c_{L_s}^o$ произведём с помощью решения линейных систем

$$c_{N_s}^o = \arg \left\{ \min_{c_{N_s} \in C} F(c_{L_s}^o(c_{N_s}), Y_s) \right\}, \quad c_{L_s}^o = A(c_{N_s}^o)^{-1} b(c_{N_s}^o), \quad s = 1, \dots, s_0.$$

Параметрические функции на локальных интервалах для первого аппроксимационного этапа найдём с учётом (2) $p_{1,l}^o(c_s^o, Ti) = p_{1,l}(c_{L_s}^o, c_{N_s}^o, Ti)$, $N_{1,s} \leq i < N_{2,s}$, $p_{1,l}^o(c_s^o, Ti) = 0$, $i < N_{1,s}$, $i > N_{2,s}$, $l = 1, \dots, l_0$. Реализуем суммирование и сформируем последовательности кусочно-непрерывных функций с разрывами в точках стыковки локальных интервалов

$$p_{1,l}^o(c^o, Ti) = \sum_{s=1}^{s_0} p_{1,l}^o(c_s^o, Ti), \quad i = 1, \dots, N_{f_1}, \quad l = 1, \dots, l_0. \tag{5}$$

Оценки параметрических функций $p_{1,l}^o(c^o, Ti)$, $i = 1, \dots, N_{f_1}$, $l = 1, \dots, l_0$ (5) примем в качестве результатов первого аппроксимационного этапа.

Рассмотрим второй этап аппроксимации для оценивания параметрических функций путём построения моделей взвешенных усреднений [Гетманов и др., 2015]. Произведём сглаживание последовательностей кусочно-непрерывных функций оценок параметрических функций $p_{1,l}^o(c^o, Ti)$, $i = 1, \dots, N_{f_1}$, $l = 1, \dots, l_0$. Реализуем для (5) построение скользящих локальных аппроксимационных моделей $y_{M_2}(d_{l,r}, Ti)$, $d_{l,r}$ – векторы параметров с размерностью $(r_0, 1)$. Определим скользящие локальные интервалы $N_{1,r} \leq i \leq N_{2,r}$ размером N_0 с шагом скольжения N_d в границах $N_{1,r} = 1 + N_d(r - 1)$, $N_{2,r} = N_{1,r} + N_0 - 1$, $r = 1, \dots, r_0$, $r_0 = \text{int}((N_{f_1} - N_0)/N_d)$, $N_{f_2} = N_d(r_0 - 1) + N_0$, $N_{f_2} \leq N_{f_1}$, где int – функция целой части. Запишем выражения для локальных функционалов $F(d_{l,r}, c^o)$ и вычислим оценки векторов параметров $d_{l,r}^o(c^o)$, $r = 1, \dots, r_0$

$$F(d_{l,r}, c^o) = \sum_{i=N_{1,r}}^{N_{2,r}} (p_{1,l}^o(c^o, Ti) - y_{M_2}(d_{l,r}, Ti))^2, \quad d_{l,r}^o(c^o) = \arg \left\{ \min_{d_{l,r}} (F(d_{l,r}, c^o)) \right\}, \quad l = 1, \dots, l_0. \quad (6)$$

С использованием $d_{l,r}^o(c^o)$ из (6) найдём скользящие модели $p_{20}(d_{l,r}^o, c^o, Ti)$, $N_{1,r} \leq i \leq N_{2,r}$, $p_{20}(d_{l,r}^o, c^o, Ti) = 0$, $i < N_{1,r}, N_{2,r} > i$, $r = 1, \dots, r_0$, просуммируем их и получим

$$p_{20}^o(d_l^o, c^o, Ti) = \sum_{r=1}^{r_0} p_{20}^o(d_{l,r}^o, c^o, Ti), \quad i = 1, \dots, N_{f_2}, \quad l = 1, \dots, l_0. \quad (7)$$

Функции $p_{20}^o(d_l^o, c^o, Ti)$ реализованы, как суммы с перекрытиями от скольжения, результат (7) усредним со взвешиванием. Введём единичные функции $W_r(Ti)$, найдём их сумму, вычислим весовую функцию $W(Ti)$ и оценки параметрических функций $p_2^o(d_l^o, c^o, Ti)$ путём аппроксимационного взвешивания

$$W_r(Ti) = 1, \quad N_{1,r} \leq i \leq N_{2,r}, \quad W_r(Ti) = 0, \quad 1 \leq i \leq N_{1,r} - 1, \quad N_{2,r} + 1 \leq i \leq N_{f_2},$$

$$W(Ti) = 1 / \left(\sum_{r=1}^{r_0} W_r(Ti) \right), \quad p_2^o(d_l^o, c^o, Ti) = W(Ti) p_{20}^o(d_l^o, c^o, Ti). \quad (8)$$

Оценки параметрических функций $p_2^o(d_l^o, c^o, Ti)$, $i = 1, \dots, N_{f_2}$, $l = 1, \dots, l_0$ для (8) примем в качестве результатов второго аппроксимационного этапа.

4. Вычисление оптимальных линейных и нелинейных локальных параметров сигналов на основе кусочно-синусоидальных моделей

Для наблюдений одночастотного сигнала $Y(Ti)$ с меняющимися амплитудой и частотой со средним значением f_0 на локальном интервале с $i = 1, \dots, N$ из нескольких единиц-десятков периодов колебаний была сформирована кусочно-синусоидальная модель

$$y_M(c, Ti) = a\varphi_1(f_k, Ti) + b\varphi_2(f_{kl}, Ti) \quad (9)$$

с базисными функциями $\varphi_1(f_k, Ti) = \cos(2\pi f_k Ti(i-1))$, $\varphi_2(f_k, Ti) = \sin(2\pi f_k Ti(i-1))$. Данная модель в настоящей статье является основной для рассматриваемых геофизических сигналов и может быть легко обобщена на многочастотный случай [Гетманов, 2019].

В (9), где вектор $c^T = (a, b, f_k)$, выделялись линейные амплитуды a, b и нелинейный частотный параметр f_k . Устанавливались границы для нелинейных параметров $f_{\min} \leq f_k \leq f_{\max}$ ($f_{\min} < f_0 < f_{\max}$), параметр k_f и назначались дискретные значения f_k

$$f_k = f_{\min} + df(k-1), \quad k = 1, \dots, k_f, \quad df = (f_{\max} - f_{\min}) / (k_f - 1). \quad (10)$$

Записывался функционал в виде суммы квадратов разностей для наблюдений $Y(Ti)$ и локальной модели (9)

$$F(Y, a, b, f_k) = \sum_{i=1}^N (Y(Ti) - a\varphi_1(f_k, Ti) - b\varphi_2(f_k, Ti))^2. \quad (11)$$

При фиксированных индексе k и параметре f_k из (10) вычислим частично оптимальные линейные параметры $a^o(f_k)$, $b^o(f_k)$ для функционала (11) на основе решения системы линейных уравнений второго порядка (3). Формировался частично оптимальный функционал $F(Y, a^o(f_k), b^o(f_k))$ и находился оптимальный индекс k^o путём минимизационного перебора

$$k^o = \arg \left\{ \min_{1 \leq k \leq k_f} F(Y, a, b, f_k) \right\},$$

на основе которого вычислялись оптимальные линейные и нелинейные параметры для локальной кусочно-синусоидальной модели (9)

$$f^o = f_{k^o}, a^o = a^o(f_{k^o}), b^o = b^o(f_{k^o}). \quad (12)$$

5. Оценивание параметрических функций для модельных нестационарных сигналов

5.1. Геомагнитные пульсации и модельные наблюдения геомагнитных пульсаций

Предложенная математическая технология оценивания была апробирована на модельных наблюдениях нестационарных геомагнитных пульсаций и рассмотрении модельных параметрических функций.

Геомагнитные пульсации представляют собой колебания магнитного поля Земли в диапазоне частот от тысячных долей герца до нескольких герц и характеризуются нестационарной по амплитудам и частотам структурой [Гульельми и Потанов, 2019; Гульельми и Троицкая, 1973; Клейменова, 2007; Михайлова и др., 2022]. Данные сигналы порождаются плазменными гидромагнитными волновыми процессами, возникающими в солнечном ветре гелиосферы и магнитосферы Земли. Существует большое разнообразие типов пульсаций, которые отличаются друг от друга спектральным составом, эволюцией во времени и другими особенностями. Достаточно большое количество публикаций, касающихся геомагнитных пульсаций, связаны с рассмотрением, главным образом, вопросов физики их происхождения, например, [Позднякова и др., 2025; Fedorov et al., 2018; Liu et al., 2023; Matsuda et al., 2021; Yin et al., 2024]; существенно меньше внимания уделено задачам цифровой обработки наблюдений геомагнитных пульсаций с целью получения оценок их параметров.

Модельные наблюдения геомагнитных пульсаций имитировали, с определёнными приближениями, экспериментальные нестационарные геомагнитные пульсации. Формирование модельных наблюдений осуществлялось, таким образом, чтобы модельные и экспериментальные наблюдения были близки по средним частотам, примерным видам амплитудных и частотных модуляций для обеспечения адекватности. Расчёты на модельных сигналах необходимы при формировании представлений о возможных погрешностях оценок параметрических функций для экспериментальных наблюдений.

Модельные наблюдения сигналов пульсаций $Y_M(Ti)$ представлялись соотношениями

$$Y_M(Ti) = Y_{M_0}(Ti) + W_0(Ti), \quad Y_{M_0}(Ti) = A_{M_0}(Ti) \cos(\varphi_{M_0}(Ti)), \quad i = 1, \dots, N_f, \quad (13)$$

для которых амплитудные и частотные параметрические функции $A_{M_0}(Ti)$, $f_{M_0}(Ti)$ вычислялись на основе следующих формул

$$\begin{aligned} A_{M_0}(Ti) &= A_0 \exp(\gamma_0 Ti) (1 + \mu_a \sin(2\pi f_a(Ti)Ti + \varphi_a)), \\ f_a(Ti) &= f_{a_1} (1 + \mu_{a_1} \sin(2\pi f_{a_2} Ti(i-1) + \varphi_{a_1})). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\varphi_{M_0}(Ti) = 2\pi f_0 Ti(i-1) + \mu_f \sin(2\pi f_m Ti(i-1) + \varphi_m) + \varphi_0, \quad (15)$$

$$f_{M_0}(Ti) = f_0 + \mu_f f_m \cos(2\pi f_m Ti(i-1) + \varphi_m). \quad (16)$$

Формулы (14) описывали функцию амплитудной модуляции, выражения (15), (16) для фазовой и частотной функций связаны через операцию дифференцирования. Принимались для расчётов численные значения $T = 0,1$ с, $N_f = 3000$, $f_0 = 0,30$ Гц, $\mu_f = 2,025$, $f_m = 0,015$ Гц, $\varphi_m = 1,57$ рад, $\varphi_0 = 0,3$ рад, $A_0 = 0,0889$ нТл, $\gamma_0 = 0,007$ с⁻¹, $\mu_a = 0,75$, $f_a = 0,015$ Гц, $\varphi_a = 0,5$ рад, $f_{a_1} = 0,015$ Гц, $\mu_{a_1} = 0,1$, $f_{a_2} = 0,006$ Гц, $\varphi_{a_1} = 0$ рад. Погрешности наблюдений $W_0(Ti)$ в (13) моделировались случайными нормально распределёнными числами с нулевым математическим ожиданием (МО) и среднеквадратичным значением (СКЗ) $\sigma_0 = 0,2$.

Качество решения задачи минимизации для нахождения оценок модельных параметров a^o, b^o и нелинейного параметра f^o (9) зависит: 1. от частотного поискового интервала и априорных сведений о средней частоте исследуемого сигнала; 2. от чисел обусловленности $\mu(A)$, зависящих от частоты для матриц систем линейных уравнений,

см. (3). Очевидно, что для участка частотного поискового интервала с малыми числами обусловленности погрешности определения параметров будут меньше погрешностей для параметров участка с большими числами обусловленности.

Устранение высокочастотных и низкочастотных составляющих в наблюдениях – обязательный этап цифровой обработки. Использовался цифровой полосовой фильтр Баттерворта размерности N_B с относительными частотами среза W_{c_1} , W_{c_2} . Для частоты Найквиста $f_N = 1/2T$ и f_0 относительная частота составила величину $W_{c_0} = f_0/f_N$. При этом должны выполняться неравенства $W_{c_1} < W_{c_0} < W_{c_2}$; приняты значения $W_{c_0} = 0,06$, $W_{c_1} = 0,02$, $W_{c_2} = 0,11$, $N_B = 6$.

На рис. 1 представлены вычисления $Y_M(Ti)$ наблюдений модельных зашумлённых геомагнитных пульсаций по формулам (13)–(16). Имеет место сложный вид нестационарной амплитудной функции и видны квазипериодические всплески – волновые пакеты, длительностью несколько единиц-десятков периодов со средней частотой f_0 , которые имитировали «жемчужины».

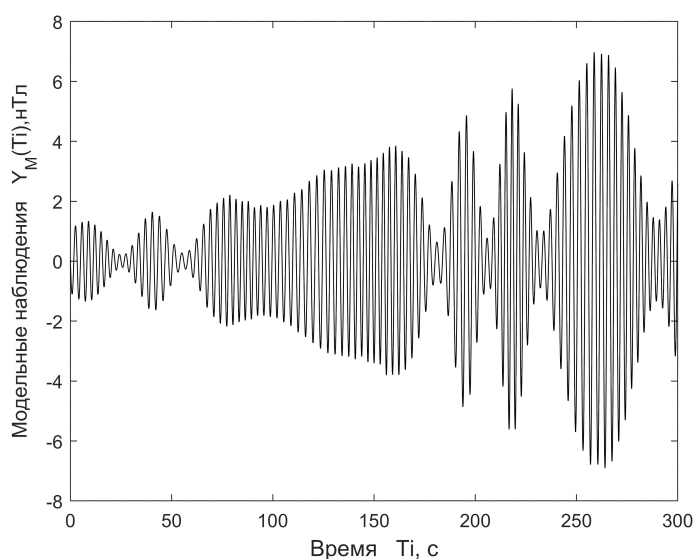


Рис. 1. Результат вычислений $Y_M(Ti)$ наблюдений модельных пульсаций.

5.2. Оценивание параметрических амплитудных и частотных функций для модельных геомагнитных пульсаций

На вход алгоритмов вычислений оценок параметрических амплитудных и частотных функций подавались модельные нестационарные наблюдения (13)–(16).

Для первого этапа аппроксимации задавались $N_f = 3000$, $N = 32$ и число локальных интервалов $s_0 = \text{int}(N_f/N)$, $N_{f_1} = N_{s_0}$, $s_0 = 93$, $N_{f_1} = 2976$. Назначались границы для частотной функции $f_{\min} = 0,01$ Гц, $f_{\max} = 0,65$ Гц и параметр частотного поиска $k_f = 1500$. Вычислялись последовательности оценок локальных моделей $y_M(c_s^0, Ti)$, $s = 1, \dots, s_0$ и оценки локальных параметрических амплитудных и частотных функций

$$\begin{aligned} A^o(c_s^0, Ti) &= (a_s^{2,o} + b_s^{2,o})^{1/2}, \quad f^o(c_s^0, Ti) = f_s^o \quad \text{для } N_{1,s} \leq i < N_{2,s}, \\ A_s^o(c_s^0, Ti) &= 0, \quad f^o(c_s^0, Ti) = 0 \quad \text{для } i < N_{1,s}, \quad N_{2,s} < i \leq N_{f_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценки параметрических амплитудных и частотных функций записывались с помощью суммирования локальных оценок (17) и представлялись в виде кусочно-непрерывных (кусочно-постоянных) функций

$$A_L^o(c^o, Ti) = \sum_{s=1}^{s_0} A^o(c_s^o, Ti),$$

$$f_L^o(c^o, Ti) = \sum_{s=1}^{s_0} f^o(c_s^o, Ti), \quad 1 \leq i \leq N_{f_1}.$$
(18)

Для второго этапа аппроксимации вычислялись скользящие кусочно-линейные модели. Назначались параметры скольжения $N_{0,A} = N \cdot 4$, $N_{d,A} = N/8$ и $N_{0,f} = N \cdot 8$, $N_{d,f} = N$ для амплитудных и частотных параметрических функций, $1 \leq i \leq N_{f_2}$, $N_{f_2} = 2974$. Результаты аппроксимаций второго этапа обозначались, как $A_L^o(c^o, d^o, Ti)$, $f_L^o(c^o, d^o, Ti)$; далее, на основе функции $W(Ti)$ из (8) реализовывалось взвешенное усреднение

$$A_W^o(c^o, d^o, Ti) = W(Ti)A_L^o(c^o, d^o, Ti),$$

$$f_W^o(c^o, d^o, Ti) = W(Ti)f_L^o(c^o, d^o, Ti), \quad 1 \leq i \leq N_{f_2}.$$
(19)

На рис. 2 и 3 помещены результаты вычислений модельных амплитудных и частотных параметрических функций, полученных на основе (13)–(16) и (18), (19).

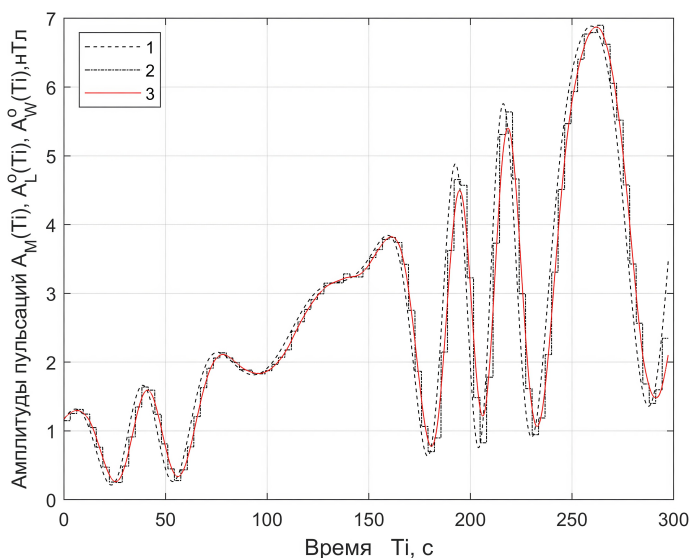


Рис. 2. Результаты вычислений для модельного сигнала амплитудной функции $A_M(Ti)$ (индекс 1), оценок амплитудных функций первого и второго аппроксимационного этапов $A_L^o(Ti)$, $A_W^o(Ti)$ (индексы 2, 3).

Для участков частотного поискового интервала (f_{min}, f_{01}) , (f_{01}, f_{max}) , $f_{min} = 0,01$ Гц, $f_{01} = 0,065$ Гц, $f_{max} = 0,65$ Гц были вычислены числа обусловленности $\mu(A)$ (подразд. 5.1) в зависимости от частоты. Для первого участка (f_{min}, f_{01}) среднее значение $\mu(A)$ составило величину ≈ 210 , для второго участка (f_{01}, f_{max}) – ≈ 55 . Частота модельного сигнала меняется в диапазоне $(0,3 - 0,03) \text{ Гц} \leq f \leq (0,3 + 0,03) \text{ Гц}$, который соответствует второму участку. Данное обстоятельство позволяет сделать вывод, что в этом случае относительно малая величина чисел обусловленности в определённой степени обеспечивает малые погрешности оценок параметров модели.

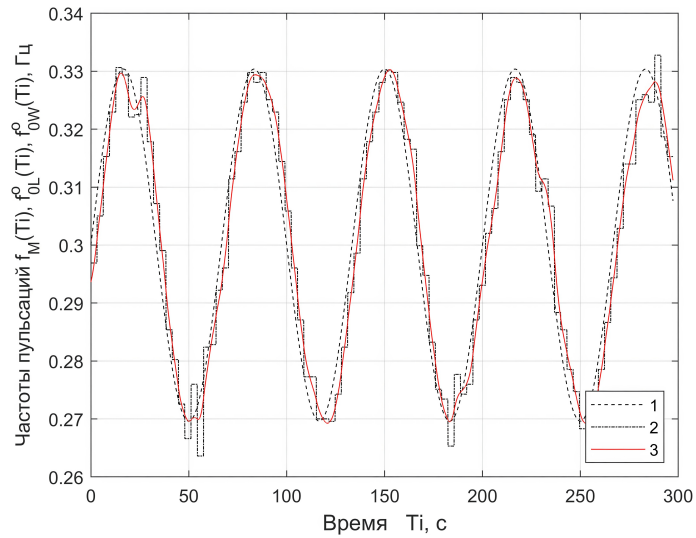


Рис. 3. Результаты вычислений для модельного сигнала частотной функции $f_M(Ti)$ (индекс 1), оценок частотных функций первого и второго аппроксимационного этапов $f_{0L}^o(Ti)$, $f_{0W}^o(Ti)$ (индексы 2, 3).

Эффективность оценивания функций амплитуд и частот для модельных пульсаций определялась на основе использования очевидных СКЗ, вычислялись модельные относительные погрешности $\varepsilon_{M,AL}$, $\varepsilon_{M,AW}$, $\varepsilon_{M,fL}$, $\varepsilon_{M,fW}$

$$\begin{aligned} \delta A_{M_0} &= \left(\frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} A_{M_0}^2(Ti) \right)^{1/2}, \\ \delta A_L &= \left(\frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} (A_{M_0}(Ti) - A_L^o(Ti))^2 \right)^{1/2}, \\ \delta A_W &= \left(\frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} (A_{M_0}(Ti) - A_W^o(Ti))^2 \right)^{1/2}, \\ \varepsilon_{M,AL} &= \frac{\delta A_L}{\delta A_{M_0}} 100\%, \\ \varepsilon_{M,AW} &= \frac{\delta A_W}{\delta A_{M_0}} 100\%, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \delta f_{M_0} &= \left(\frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} f_{M_0}^2(Ti) \right)^{1/2}, \\ \delta f_L &= \left(\frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} (f_{M_0}(Ti) - f_{0L}^o(Ti))^2 \right)^{1/2}, \\ \delta f_W &= \left(\frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} (f_{M_0}(Ti) - f_{0W}^o(Ti))^2 \right)^{1/2}, \\ \varepsilon_{M,fL} &= \frac{\delta f_L}{\delta f_{M_0}} 100\%, \\ \varepsilon_{M,fW} &= \frac{\delta f_W}{\delta f_{M_0}} 100\%. \end{aligned} \tag{21}$$

Получены численные результаты, которые базировались на (20), (21): $\delta A_{M_0} = 5,189$, $\delta A_L = 0,2905$, $\delta A_W = 0,0928$ и $\varepsilon_{M,AL} = 5,6\%$, $\varepsilon_{M,AW} = 1,8\%$, $\delta f_{M_0} = 0,3091$, $\delta f_L = 0,0784$, $\delta f_W = 0,0160$ и $\varepsilon_{M,fL} = 25,3\%$, $\varepsilon_{M,fW} = 5,2\%$. Величины относительных погрешностей $\varepsilon_{M,AW}$, $\varepsilon_{M,fW}$, составившие единицы процентов, свидетельствовали об успешности применённой технологии для вычислений амплитудных и частотных функций модельных пульсаций.

5.3. Вычисление оценок функций инкрементов/декрементов и частотных дисперсий для модельных геомагнитных пульсаций

Был сформирован алгоритм вычислений оценок функций инкрементов/декрементов колебаний – показателей, которые определяли величины относительных нарастаний/затуханий амплитуд для незашумлённой и зашумлённой моделей (13)–(16). Для $Y_{M_0}(Ti)$ и отфильтрованных функций $Y_{M,F}(Ti)$ находились временные координаты t_k^o положительных локальных максимумов и значения $A_{M_0}(t_k^o)$, $A_{M,F}(t_k^o)$, $k = 1, \dots, k_0$, которые принимались в качестве амплитуд пульсаций. Вычислялись разности $D_{M_0}(t_k^o) = A_{M_0}(t_{k+1}^o) - A_{M_0}(t_k^o)$, $D_{M,F}(t_k^o) = A_{M,F}(t_{k+1}^o) - A_{M,F}(t_k^o)$ и коэффициенты $\alpha_{M_0}(t_k^o)$, $\alpha_{M,F}(t_k^o)$, $k = 1, \dots, k_0 - 1$ относительных инкрементов/декрементов

$$\alpha_{M_0}(t_k^o) = (A_{M_0}(t_{k+1}^o) + D_{M_0}) / A_{M_0}(t_k^o), \quad \alpha_{M,F}(t_k^o) = (A_{M,F}(t_{k+1}^o) + D_{M,F}) / A_{M,F}(t_k^o)$$

для интервалов времени $(t_{k+1}^o - t_k^o)$. Находились оценки инкрементов/декрементов

$$\gamma_{M_0}(t_k^o) = (1 / (t_{k+1}^o - t_k^o)) \ln(\alpha_{M_0}(t_k^o)), \quad \gamma_{M,F}(t_k^o) = (1 / (t_{k+1}^o - t_k^o)) \ln(\alpha_{M,F}(t_k^o)), \quad k = 1, \dots, k_0 - 1.$$

Оценки модельных функций инкрементов/декрементов $\gamma_{M_0}^o(Ti)$, $\gamma_{M,F}^o(Ti)$ вычислялись путём суммирования, где $N_k = \text{int}(t_k^o / T)$, $N_{k+1} = \text{int}(t_{k+1}^o / T)$

$$\gamma_{M_0}^o(k, Ti) = \gamma_{M_0}(t_k^o) \quad \text{для } N_k \leq i \leq N_{k+1} \text{ и } \gamma_{M_0}^o(k, Ti) = 0, \quad i < N_k, N_{k+1} < i \leq N_{f_3},$$

$$\gamma_{M,F}^o(k, Ti) = \gamma_{M,F}(t_k^o) \quad \text{для } N_k \leq i \leq N_{k+1} \text{ и } \gamma_{M,F}^o(k, Ti) = 0, \quad i < N_k, N_{k+1} < i \leq N_{f_3},$$

$$\gamma_{M_0}^o(Ti) = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_{M_0}^o(k, Ti), \quad \gamma_{M,F}^o(Ti) = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_{M,F}^o(k, Ti), \quad i = 1, \dots, N_{f_3}.$$

Для $\gamma_{M,F}^o(Ti)$ применялась процедура сглаживания – взвешенного аппроксимационного усреднения, результат которой обозначался, как $\gamma_{M,F,W}^o(Ti)$. На рис. 4 приведены результаты вычислений функций $\gamma_{M,F}^o(Ti)$, $\gamma_{M,F,W}^o(Ti)$ для модельного сигнала.

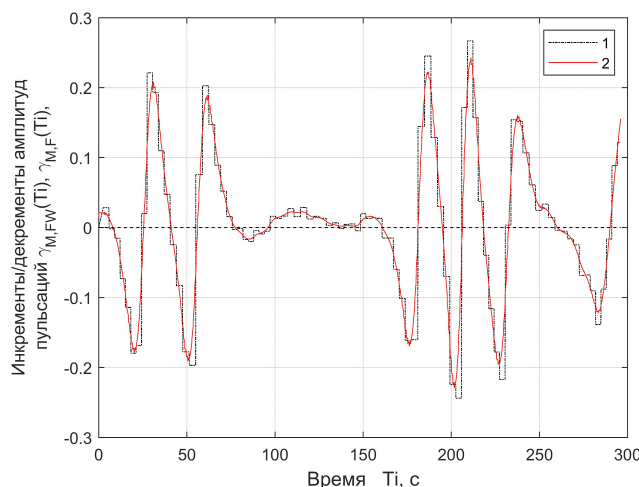


Рис. 4. Результаты оценок инкрементов/декрементов $\gamma_{M,F}^o(Ti)$ (индекс 1), $\gamma_{M,F,W}^o(Ti)$ (индекс 2).

Вычисления эффективностей оценок функций инкрементов/декрементов амплитуд пульсаций производились на основе следующих формул

$$\begin{aligned}
 \delta\gamma_{M_0} &= \frac{1}{N_{f_3}} \sum_{i=1}^{N_{f_3}} (\gamma_{M_0}^2(Ti))^{1/2}, \\
 \delta\gamma_{M,F} &= \frac{1}{N_{f_3}} \sum_{i=1}^{N_{f_3}} (\gamma_{M_0}(Ti) - \gamma_{M,F}^o(Ti))^{1/2}, \\
 \delta\gamma_{M,FW} &= \frac{1}{N_{f_3}} \sum_{i=1}^{N_{f_3}} ((\gamma_{M_0}(Ti) - \gamma_{M,FW}^o(Ti))^2)^{1/2}, \\
 \varepsilon_{M,\gamma F} &= \frac{\delta\gamma_M}{\delta\gamma_{M_0}} 100\%, \\
 \varepsilon_{M,\gamma FW} &= \frac{\delta\gamma_{M,FW}}{\delta\gamma_{M_0}} 100\%.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Получены результаты по (22) $\delta\gamma_{M_0} = 0,0894$, $\delta\gamma_{M,F} = 0,0224$, $\delta\gamma_{M,FW} = 0,0155$, $\varepsilon_{M,\gamma F} = 16,1\%$, $\varepsilon_{M,\gamma FW} = 7,3\%$, которые свидетельствовали о приемлемой успешности оцениваний функций инкрементов/декрементов амплитуд модельных пульсаций.

Был сформирован алгоритм оценивания функции частотной дисперсии $\sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti)$ для модельного сигнала на основе СКЗ разности между средней частотой f_0 и частотной функцией $f_{M_0}(Ti)$ на заданном временном интервале ΔT . Результаты оценивания частотной дисперсии, в общем случае, зависели от вида частотных функций и размеров интервалов ΔT . Рассматривался квазистационарный случай с малыми размерами ΔT , которые существенно меньше периода модельной функции $f_{M_0}(Ti)$ из (16).

Для расчётов в качестве частотной функции использовалось её приближение от второго аппроксимационного этапа $f_{0,W}^o(Ti)$ из (19) с $i = 1, \dots, N_{f_3}$. Назначался малый размер интервалов $N_{0,FD}$ и границы $N_{1,FD}(n) = 1 + N_{0,FD}(n - 1)$, $N_{2,FD}(n) = N_{0,FD}n$, $n = 1, \dots, n_{0,FD}$, $n_{0,FD} = \text{int}(N_{f_3}/N_{0,FD})$, $n_{0,FD}N_{0,FD} = N_{f_3}$, на которых вычислялись оценки МО и дисперсий $m_{FD}^o(n)$, $\sigma_{FD}^{2,o}(n)$

$$\begin{aligned}
 m_{M,FD}^o(n) &= \frac{1}{N_{0,FD}} \sum_{i=N_{1,FD}(n)}^{N_{2,FD}(n)} f_{0,W}^o(Ti), \\
 m_{M,FD}^o(n, Ti) &= m_{M,FD}^o(n), \quad N_{1,FD}(n) \leq i \leq N_{2,FD}(n), \\
 m_{M,FD}^o(n, Ti) &= 0, \quad i < N_{1,FD}(n), i > N_{2,FD}(n), \\
 m_{M,FD}^o(Ti) &= \sum_{n=1}^{n_{0,FD}} m_{M,FD}^o(n, Ti), \quad i = 1, \dots, N_{f_3}.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Осуществлялось оценивание функции частотной дисперсии $\sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{M,FD}^{2,o}(n) &= \frac{1}{(N_{0,FD} - 1)} \sum_{i=N_{1,FD}(n)}^{N_{2,FD}(n)} (m_{M,FD}^o(n, Ti) - f_{0,W}^o(Ti))^2, \\
 \sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti) &= \sigma_{M,FD}^{2,o}(n) \text{ для } N_{1,FD}(n) \leq i \leq N_{2,FD}(n), \\
 \sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti) &= 0 \text{ для } i < N_{1,FD}(n), i > N_{2,FD}(n), \\
 \sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti) &= \sum_{n=1}^{n_{0,FD}} \sigma_{M,FD}^{2,o}(n, Ti), \quad i = 1, \dots, N_{f_3}.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

На рис. 5 представлены результаты вычислений оценок функций частотных дисперсий $\sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti)$ по (23), (24) для $f_{0,W}^o(Ti)$ из (19) и $\sigma_{M_0,FD}^{2,o}(Ti)$ для модельной функции $f_{M_0}(Ti)$ из (16), $N_{f_3} = 2960$, $N_{0,FD} = 20$.

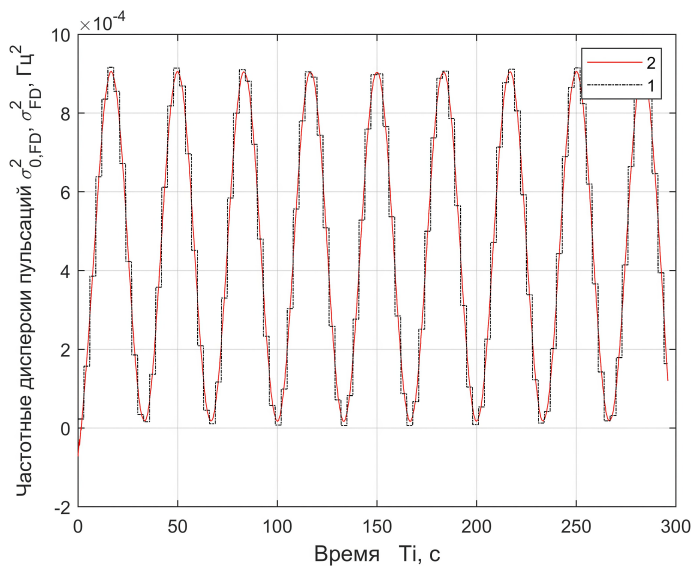


Рис. 5. Результаты вычислений оценок частотных дисперсий $\sigma_{M,FD}^{2,o}(Ti)$ (индекс 1), $\sigma_{M_0,FD}^{2,o}(Ti)$ (индекс 2).

Рассматривался численный пример вычисления СКЗ для разности частотной функции и её средних значений f_0 на временных интервалах $\Delta T = N_{0,FD}T$. Вычисление производилось по следующим формулам:

$$\sigma_{M_0,FD}^{2,o}(n) = \frac{1}{(N_{0,FD} - 1)} \sum_{i=N_{1,FD}(n)}^{N_{2,FD}(n)} (f_0 - f_{M_0}(Ti))^2,$$

$$\sigma_{M_0,FD}^{2,o} = \frac{1}{n_{0,FD}} \sum_{n=1}^{n_{0,FD}} \sigma_{M_0,FD}^2(n).$$

Была получена оценка СКЗ $\sigma_{M_0,FD}^o = 0,0244$ Гц. Рассчитанное СКЗ для оценки частотной дисперсии по формулам (23), (24) составило величину $\sigma_{M,FD}^o = 0,0256$ Гц. Оценки СКЗ подтвердили, что реализованная технология оказалась удовлетворительно успешной; относительная погрешность оценки частотной дисперсии для модельных пульсаций составила величину $\varepsilon_{M,FD} = \frac{(\sigma_{M,FD}^o - \sigma_{M_0,FD}^o)}{\sigma_{M_0,FD}^o} 100\% = 4,9\%$.

6. Оценивание параметрических функций для экспериментальных пульсаций геомагнитного поля

Для исследования оцениваний параметрических функций были использованы наблюдения $Y(Ti)$, нТл экспериментального сигнала с геомагнитными пульсациями диапазона РСЗ, станция SDY (Гренландия), дата наблюдения 16.01.2016 г., начало времени наблюдения 13.10 UT, $i = 1, \dots, N_f$, $N_f = 46\,696$, $T = 0,1$ с. Оценивания реализовывались на основе алгоритмов из разд. 5.

6.1. Оценивание нестационарных параметрических амплитудных и частотных функций для экспериментальных геомагнитных пульсаций

Организация эффективного частотного подпоиска была произведена на основе оценивания средней частоты пульсаций для данных наблюдений с помощью ДПФ. На рис. 6 размещён вычисленный график ДПФ-спектра, где частотное разрешение составило величину $\Delta f = 1/N_D T = 0,0195$ Гц, $N_D = 1024$ – размерность ДПФ; $0 \leq f_k \leq f_{k_0}$, $k_0 = 128$, $f_{k_0} = 2,5$ Гц. Количество усреднений при вычислении ДПФ составило значение $m = 45$, количество использованных наблюдений – $N_D m = 46\,080$. По положению максимума ДПФ-спектра (рис. 6) была определена средняя частота пульсаций $\bar{f}_0 \approx 0,3613$ Гц.

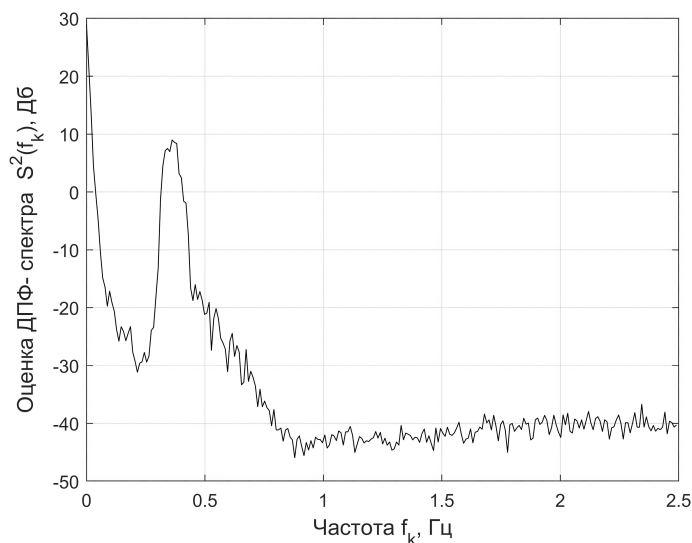


Рис. 6. График ДПФ – спектра $S^2(f_k)$, Дб, $f_k = \Delta f_{(k-1)}$, экспериментального сигнала геомагнитных пульсаций.

Устранение низкочастотных и высокочастотных составляющих в экспериментальном сигнале было осуществлено с помощью полосового фильтра Баттерворта с параметрами $N_B = 6$, $W_{c_1} = 0,02$, $W_{c_2} = 0,12$ и для $W_{c_0} = 0,0726$.

На рис. 7 представлено изображение фрагмента отфильтрованного экспериментального сигнала наблюдений геомагнитных пульсаций с «жемчужинами» $Y_F(T_i)$, $i = 1, \dots, N_{f_4}$, $N_{f_4} = 2944$. Для данного сигнала были реализованы вычисления оценок амплитудных и частотных функций на основе локальных моделей (9). С учётом ДПФ-спектра (рис. 6) устанавливались границы частотного поиска $f_{\min} = 0,005$ Гц, $f_{\max} = 0,605$ Гц и $k_f = 1500$. С применением минимизации функционалов (11) находились локальные параметры (12), на основе которых были сформированы оценки параметрических амплитудных и частотных функций.

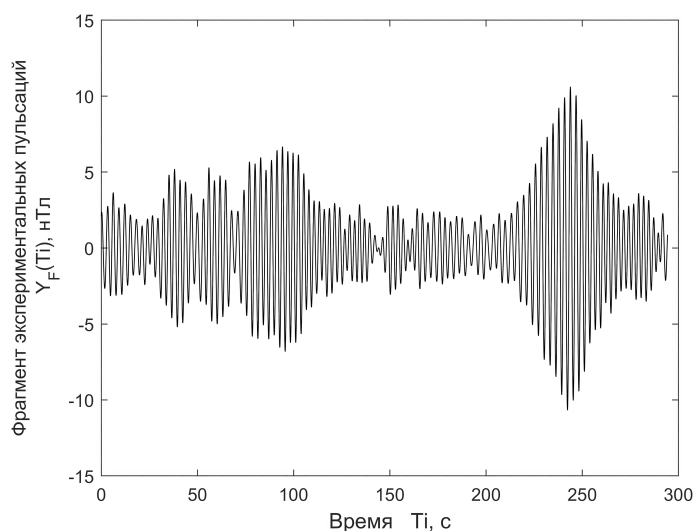


Рис. 7. Фрагмент наблюдений экспериментальных отфильтрованных геомагнитных пульсаций $Y_F(T_i)$.

На рис. 8, рис. 9 для первого и второго аппроксимационного этапа помещены оценки амплитудных, $N = 32$, $i = 1, \dots, N_{f_{21}}$, и частотных функций, $N = 64$, $i = 1, \dots, N_{f_{22}}$, вычисленные с параметрами скольжения $N_{01} = 4N$, $N_{d_1} = N/16$, $N_{f_{21}} = 2942$ и $N_{02} = 8N$, $N_{d_1} = N/4$, $N_{f_{22}} = 2936$. Пунктир на рис. 9 обозначал среднюю частоту пульсаций \bar{f}_0 .

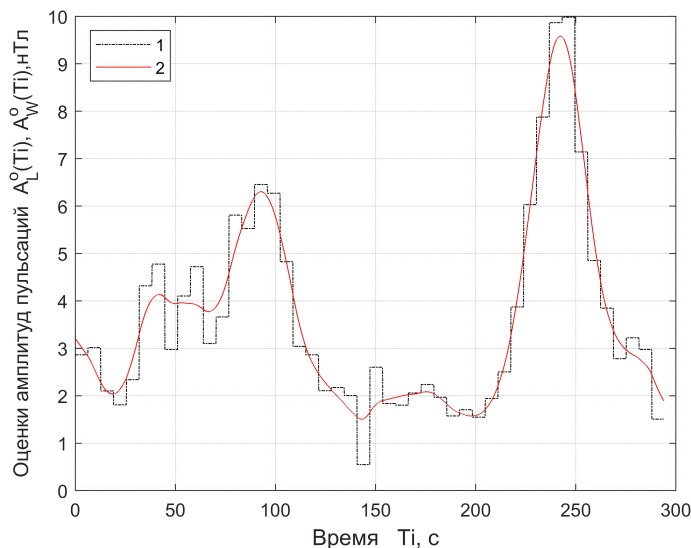


Рис. 8. Оценки амплитудных функций $A_L^o(Ti)$ (индекс 1), $A_W^o(Ti)$ (индекс 2).

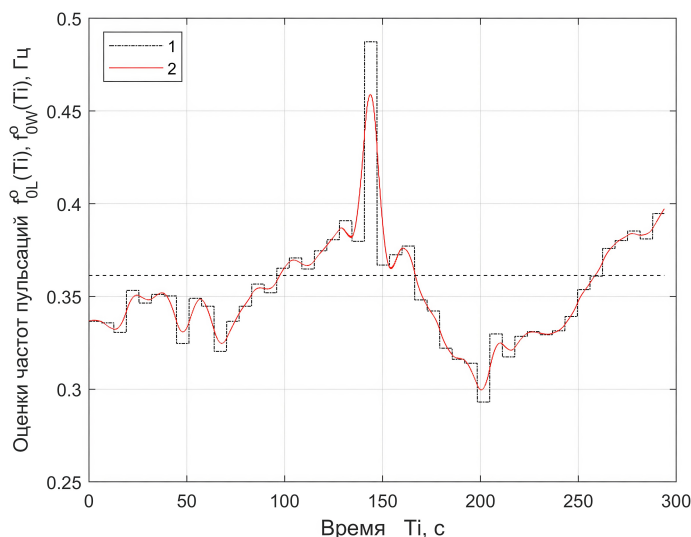


Рис. 9. Оценки частотных функций $f_{0,L}^o(Ti)$ (индекс 1), $f_{0,W}^o(Ti)$ (индекс 2), пунктир – \bar{f}_0 .

Сравнение результатов оценивания амплитудных и частотных функций экспериментальных наблюдений рис. 8, рис. 9 расчётов относительных погрешностей модельных амплитудных и частотных функций, позволило заключить, что выбранные локальные модели и взвешенные усреднения близки к оптимальным. Оценивание параметрических функций явилось успешным с величинами относительных погрешностей амплитудной и частотной функций, составившими, с учётом подразд. 5.2, величины $\epsilon_{AW} \approx 1,8\%$, $\epsilon_{fW} \approx 5,2\%$.

Рассмотрение рис. 7 позволило оценить временные координаты начал и окончаний для двух «жемчужин»: 65 с – 115 с, 200 с – 270 с; анализ рис. 9 с оценками частотной функции дал возможность заключить, что в указанных временных координатах частотная функция изменялась по закону, близкому к линейному, реализуя линейно-частотную модуляцию с параметрами изменения частоты, примерно, 0,058 Гц/мин и 0,043 Гц/мин, соответственно. Возможность установления закономерности, связанной утверждением о линейной частотной модуляции для «жемчужин», следует реализовать на достаточно большом количестве вариантов наблюдений для достижения необходимой статистической достоверности.

Для чисел обусловленности при рассмотрении случая экспериментальных наблюдений можно сделать почти аналогичные выводы относительно качества решений,

поскольку матрицы линейных уравнений и частотные поисковые интервалы для случая экспериментальных наблюдений, фактически, совпадают с матрицами и поисковыми интервалами для случая модельных наблюдений.

6.2. *Оценивание функций инкрементов/декрементов амплитуд и частотной дисперсии для экспериментальных геомагнитных пульсаций*

Для оценивания функций инкрементов/декрементов в случае экспериментальных наблюдений были использованы материалы, разработанные в подразд. 5.3 для вычисления указанных функций в отношении модельных пульсаций. На рис. 10 помещены графики оценок функций инкрементов/декрементов $\gamma_F^o(Ti)$ – результат локальной аппроксимации, $\gamma_{FW}^o(Ti)$ – результат аппроксимационного взвешенного усреднения

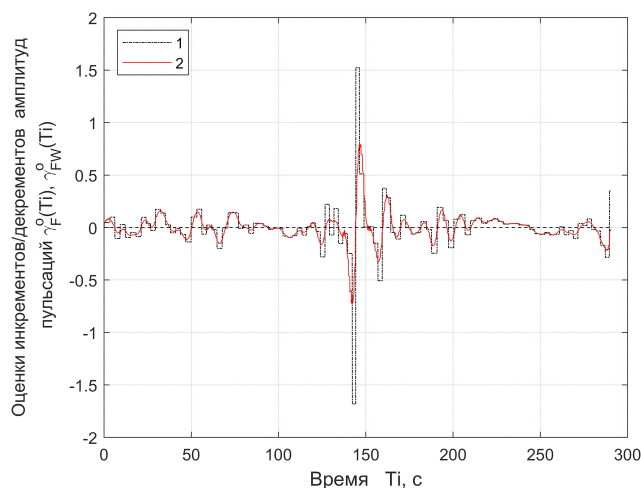


Рис. 10. Оценки функций инкрементов/декрементов $\gamma_F^o(Ti)$ (индекс 1), $\gamma_{FW}^o(Ti)$ (индекс 2).

Сравнения графиков рис. 8 и рис. 10 дало возможность сделать вывод, что резким изменениям производных для амплитудных функций рис. 8 соответствовали значительные изменения в графиках функций инкрементов/декрементов, которые отчётливо видны на рис. 10. Величины относительных погрешностей для оценок рассматриваемых функций, исходя из результатов подразд. 5.3, составили, ориентировочно, значения $\epsilon_{\gamma_F} = 16\%$, $\epsilon_{\gamma_{FW}} \approx 7\%$, которые свидетельствовали о приемлемой точности вычислений инкрементов/декрементов для экспериментальных пульсаций.

Оценивание функций частотной дисперсии экспериментальных пульсаций было осуществлено на основе сформированных в подразд. 5.2, 5.3 алгоритмов. На рис. 11 помещены результаты вычисления оценки функции частотной дисперсии $\sigma_{FD}^{2,o}(Ti)$.

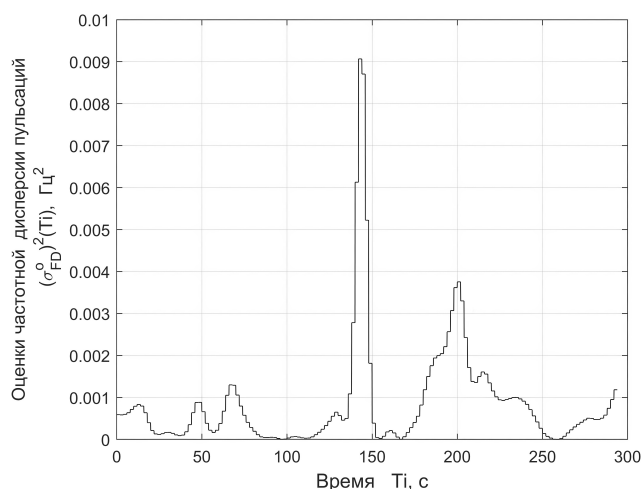


Рис. 11. Результаты вычислений оценки функции частотной дисперсии $\sigma_{FD}^{2,o}(Ti)$.

Использовалась оценка частотной функции $f_{0,W}^o(Ti)$, $i = 1, \dots, N_{f_5}$, $N_{f_5} = 2904$, назначены размеры интервалов $N_{0,FD} = 20$ для оценивания локальных МО и дисперсий. Относительная погрешность для $\sigma_{FD}^{2,o}(Ti)$, исходя из результатов подразд. 5.3 с расчётами на основе модельных пульсаций, составила $\varepsilon_{FD} \approx 5\%$, которое свидетельствовало об удовлетворительной точности вычислений оценок частотных дисперсий для экспериментальных пульсаций.

7. Заключение

1. Разработанная математическая технология цифровой обработки геофизических сигналов для оценивания их нестационарных параметрических функций с использованием двухэтапных аппроксимаций, апробированная на наблюдениях модельных и экспериментальных геомагнитных пульсаций, оказалась работоспособной и эффективной.
2. Сформированные модельные наблюдения геомагнитных пульсаций и экспериментальные наблюдения геомагнитных пульсаций, как показали расчёты, оказались в достаточной степени адекватными; вследствие этого, по оценкам погрешностей параметрических функций для модельных наблюдений вполне можно делать суждения об оценках погрешностей параметрических функций для экспериментальных наблюдений.
3. Результаты применения технологии двухэтапных аппроксимаций для оценивания амплитудных и частотных функций сигналов геомагнитных пульсаций оказались успешными; относительные погрешности оценок амплитуд и частот для экспериментальных наблюдений приняли значения $\varepsilon_{AW} \approx 1,8$, $\varepsilon_{fW} \approx 5,2$. Продемонстрированы возможности технологии, позволяющие сделать оценки функций частоты и функций производной частоты для геомагнитных пульсаций типа «жемчужины»; вычисления для рассмотренного примера «жемчужин» геомагнитных пульсаций, показали, что частота для них изменялась почти по линейному закону со скоростью $\approx 0,04\text{--}0,06$ Гц/мин.
4. Результаты применения технологии двухэтапных аппроксимаций для оценивания функций инкрементов/декрементов и частотных дисперсий сигналов геомагнитных пульсаций оказались успешными; относительные погрешности экспериментальных оценок функций инкрементов/декрементов и частотных дисперсий составили значения $\varepsilon_{\gamma FW} \approx 7,0$, $\varepsilon_{FD} \approx 5$.
5. Предложенная математическая технология цифровой обработки для оценивания параметрических функций нестационарных геофизических сигналов и, в частности, для сигналов геомагнитных пульсаций на основе двухэтапных аппроксимаций имеет большие резервы к усовершенствованию и благоприятную перспективу использования в информационных задачах геофизики.


Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра Российской академии наук и Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта Российской академии наук, утверждённого Минобрнауки России.

Список литературы

- Алешкевич В. А. Курс общей физики. Оптика. — М. : Физматлит, 2011. — 320 с.
- Аникеев Д. А., Пенкин Г. О. и Стрижов В. В. Классификация физической активности человека с помощью локальных аппроксимирующих моделей // Информатика и её применения. — 2019. — Т. 13, № 1. — С. 40–48. — <https://doi.org/10.14357/19922264190106>.
- Афанасьев А. А., Рыболовлев А. А. и Рыжков А. П. Цифровая обработка сигналов. — М. : Горячая Линия-Телеком, 2019. — 356 с.
- Гетманов В. Г. Цифровая обработка нестационарных колебательных сигналов на основе локальных и сплайновых моделей. — М. : НИЯУ МИФИ, 2011. — 298 с.
- Гетманов В. Г. Локальные и сплайновые аппроксимации в цифровой обработке геомагнитных наблюдений // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 19, № 4. — С. 26–42. — <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-26-42>.
- Гетманов В. Г. Цифровая обработка сигналов с приложениями для геофизики и экспериментальной механике. — М. : Техносфера, 2021. — 356 с.

- Гетманов В. Г., Дабагян Р. А. и Сидоров Р. В. Исследование характеристик геомагнитных пульсаций методом локальных аппроксимаций // Геомагнетизм и аэрономия. — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 209–216. — <https://doi.org/10.7868/s001679401602005x>.
- Гетманов В. Г., Довбня Б. В. и Корнилов А. С. Оценка частотных и амплитудных параметров геомагнитных пульсаций типа «серпентинная эмиссия» // Геомагнетизм и аэрономия. — 2018. — Т. 58, № 4. — С. 540–550. — <https://doi.org/10.1134/s0016794018040065>.
- Гетманов В. Г., Сидоров Р. В. и Дабагян Р. А. Метод фильтрации сигналов с использованием локальных моделей и функций взвешенного усреднения // Измерительная техника. — 2015. — № 9. — С. 52–57.
- Грибанова М. С. и Скурихина Е. А. Прогноз параметров вращения Земли с использованием методов локальной аппроксимации // Труды ИПА РАН. — 2020. — № 54. — С. 11–20. — <https://doi.org/10.32876/ApplAstron.54.11-20>.
- Гульельми А. В. и Потапов А. С. Проблемы теории магнитосферных волн Pc1. Обзор // Солнечно-земная физика. — 2019. — Т. 5, № 3. — С. 102–109. — <https://doi.org/10.12737/szf-53201910>.
- Гульельми А. В. и Троицкая В. А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. — М. : Наука, 1973. — 208 с.
- Катковник В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных (метод локальной аппроксимации). — М. : Наука, 1985. — 336 с.
- Клейменова Н. Г. Геомагнитные пульсации // Модель космоса. Том 1. — М. : МГУ, 2007. — С. 611–626.
- Михайлова О. С., Климушкин Д. Ю. и Магер П. Н. Современное состояние теории УНЧ-пульсаций диапазона Pc1 в плазме магнитосферы с тяжелыми ионами: Обзор // Солнечно-земная физика. — 2022. — Т. 8, № 1. — С. 3–18. — <https://doi.org/10.12737/szf-81202201>.
- Позднякова Д. Д., Пилипенко В. А., Носэ М. и др. Спутниковые и наземные наблюдения Pc1-пульсаций во время магнитной бури в марте 2023 г. // Солнечно-земная физика. — 2025. — Т. 11, № 2. — С. 56–68. — <https://doi.org/10.12737/szf-112202505>.
- Bioucas-Dias J., Katkovnik V., Astola J., et al. Absolute phase estimation: adaptive local denoising and global unwrapping // Applied Optics. — 2008. — Vol. 47, no. 29. — P. 5358–5369. — <https://doi.org/10.1364/ao.47.005358>.
- Fedorov E. N., Pilipenko V. A., Engebretson M. J., et al. Transmission of a Magnetospheric Pc1 Wave Beam Through the Ionosphere to the Ground // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2018. — Vol. 123, no. 5. — P. 3965–3982. — <https://doi.org/10.1029/2018ja025338>.
- Fung L., Bearon R. N. and Hwang Y. A local approximation model for macroscale transport of biased active Brownian particles in a flowing suspension // Journal of Fluid Mechanics. — 2022. — Vol. 935. — A24. — <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.10>.
- Getmanov V. G., Gvishiani A. D., Pilipenko V. A., et al. Estimation of Parameters of Non-stationary Geophysical Signals Based on Two-Stage Approximations Using Local Models // Russian Journal of Earth Sciences. — 2025. — Vol. 25. — ES2020. — <https://doi.org/10.2205/2025es000979>.
- Katkovnik V., Egiazarian K. and Astola J. Local Approximation Techniques in Signal and Image Processing. — SPIE, 2006. — 576 p. — <https://doi.org/10.1117/3.660178>.
- Liu J., Shiokawa K., Oyama S.-I., et al. A Statistical Study of Longitudinal Extent of Pc1 Pulsations Using Seven PWING Ground Stations at Subauroral Latitudes // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2023. — Vol. 128, no. 1. — <https://doi.org/10.1029/2021ja029987>.
- Makur A. A Study of Local Approximation in Information Theory. — Massachusetts Institute of Technology, 2015. — 171 p.
- Mallat S. A wavelet tour of signal processing. Second Edition. — Academic Press, 1999. — 671 p.
- Matsuda S., Miyoshi Y., Kasahava Y., et al. Multipoint Measurement of Fine-Structured EMIC Waves by Arase, Van Allen Probe A, and Ground Stations // Geophysical Research Letters. — 2021. — Vol. 48, no. 23. — <https://doi.org/10.1029/2021gl096488>.
- Nie Y., Wang Y., Sun W., et al. The Local Approximation Method for Structural Optimization // Applied Mechanics and Materials. — 2014. — Vol. 575. — P. 854–858. — <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.575.854>.
- Savelyev I. V. Physics A General Course. Volume 1. Mechanics, Molecular Physics. — М. : Mir, 1979. — 439 p.
- Time-Frequency Analysis / ed. by F. Hlawatsch and F. Auger. — London UK, Hoboken USA : John Wiley & Sons, 2013. — 472 p.
- Yin Z.-F., Zhou X.-Z., Hu Z.-J., et al. Westward Excursion of Pc1/EMIC Waves and Their Source Protons: Paradoxical Observations From Ground and Space // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2024. — Vol. 129, no. 5. — <https://doi.org/10.1029/2023ja032317>.

MATHEMATICAL TECHNOLOGY FOR ESTIMATING PARAMETRIC FUNCTIONS OF NON-STATIONARY GEOPHYSICAL SIGNALS

V. G. Getmanov^{1,2,**} and V. A. Pilipenko^{1,2} 

¹Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Schmidt Institute of Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia Federation

**Correspondence to: Victor Getmanov, vgetm2015@yandex.ru

Abstract: A mathematical technology for digital processing of geophysical signals has been developed for estimating non-stationary parametric functions. Two-stage approximations with local models in the first stage and weighted approximation averaging models in the second stage were used. Algorithms for calculating estimates of parametric amplitude and frequency functions, increment/decrement functions, and frequency dispersions have been developed. Error formulas for estimating parametric pulsation functions have been proposed. Examples of applying the technology to model and experimental observations have been implemented. The technology's capabilities are demonstrated, allowing for the calculation of frequency function estimates and frequency derivative functions for geomagnetic pulsations of the “pearl” type.

Keywords: Geophysical signals, geomagnetic pulsations, non-stationary parameters, two-stage approximation, local approximations, weighted averaging.

Received: August 26, 2025

Accepted: November 18, 2025

Published: April 7, 2026



© 2026. The Authors.

Citation: Getmanov V. G., Pilipenko V. A. (2026), Mathematical Technology for Estimating Parametric Functions of Non-Stationary Geophysical Signals, *Russian Journal of Earth Sciences*, 26, ES1013, <https://doi.org/10.2205/2026ES001087>, EDN: URQEWY

References

- Afanasyev A. A., Rybolovlev A. A. and Ryzhkov A. P. Digital Signal Processing. — M. : Goryachaya Liniya-Telekom, 2019. — 356 p. — (In Russian).
- Aleshkevitch V. A. Course in General Physics. Optics. — M. : Fizmatlit, 2011. — 320 p. — (In Russian).
- Anikeyev D. A., Penkin G. O. and Strijov V. V. Local approximation models for human physical activity classification // Informatics and Applications. — 2019. — Vol. 13, no. 1. — P. 40–48. — <https://doi.org/10.14357/19922264190106>. — (In Russian).
- Biucas-Dias J., Katkovnik V., Astola J., et al. Absolute phase estimation: adaptive local denoising and global unwrapping // Applied Optics. — 2008. — Vol. 47, no. 29. — P. 5358–5369. — <https://doi.org/10.1364/ao.47.005358>.
- Fedorov E. N., Pilipenko V. A., Engebretson M. J., et al. Transmission of a Magnetospheric Pc1 Wave Beam Through the Ionosphere to the Ground // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2018. — Vol. 123, no. 5. — P. 3965–3982. — <https://doi.org/10.1029/2018ja025338>.
- Fung L., Bearon R. N. and Hwang Y. A local approximation model for macroscale transport of biased active Brownian particles in a flowing suspension // Journal of Fluid Mechanics. — 2022. — Vol. 935. — A24. — <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.10>.
- Getmanov V. G. Digital Processing of Non-Stationary Oscillatory Signals Based on Local and Spline Models. — M. : MEPhI, 2011. — 298 p. — (In Russian).
- Getmanov V. G. Local and spline approximations in digital processing of geomagnetic observations // Chebyshevskii Sbornik. — 2019. — Vol. 19, no. 4. — P. 26–42. — <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-26-42>. — (In Russian).
- Getmanov V. G. Digital Signal Processing With Applications for Geophysics and Experimental Mechanics. — M. : Tekhnosfera, 2021. — 356 p. — (In Russian).
- Getmanov V. G., Dabagyan R. A. and Sidorov R. V. Studying geomagnetic pulsation characteristics with the local approximation method // Geomagnetism and Aeronomy. — 2016. — Vol. 56, no. 2. — P. 195–202. — <https://doi.org/10.1134/s0016793216020055>.

- Getmanov V. G., Dovbnaya B. V. and Kornilov A. S. Estimating the Frequency and Amplitude Parameters of the Serpentine-Emission Type of Geomagnetic Pulsations // *Geomagnetism and Aeronomy*. — 2018. — Vol. 58, no. 4. — P. 523–532. — <https://doi.org/10.1134/s0016793218040060>.
- Getmanov V. G., Gvishiani A. D., Pilipenko V. A., et al. Estimation of Parameters of Non-stationary Geophysical Signals Based on Two-Stage Approximations Using Local Models // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2025. — Vol. 25. — ES2020. — <https://doi.org/10.2205/2025es000979>.
- Getmanov V. G., Sidorov R. V. and Dabagyan R. A. A Method of Filtering Signals Using Local Models and Weighted Averaging Functions // *Measurement Techniques*. — 2015. — Vol. 58, no. 9. — P. 1029–1036. — <https://doi.org/10.1007/s11018-015-0837-5>.
- Gribanova M. S. and Skurikhina E. A. Prediction of Earth Rotation Parameters Using Local Approximation Techniques // *Transactions of IAA RAS*. — 2020. — No. 54. — P. 11–20. — <https://doi.org/10.32876/AppIAstron.54.11-20>. — (In Russian).
- Guglielmi A. V. and Potapov A. S. Problems of the Pc1 magnetospheric wave theory. A review // *Solar-Terrestrial Physics*. — 2019. — Vol. 5, no. 3. — P. 87–92. — <https://doi.org/10.12737/stp-53201910>.
- Guglielmi A. V. and Troitzckaya V. A. *Geomagnetics Pulsations and Diagnosis of Magnetosphere*. — M. : Nauka, 1973. — 208 p. — (In Russian).
- Katkovnik V., Egiazarian K. and Astola J. *Local Approximation Techniques in Signal and Image Processing*. — SPIE, 2006. — 576 p. — <https://doi.org/10.1117/3.660178>.
- Katkovnik V. Ya. *Nonparametric Identification and Smoothing of Data (Local Approximation Method)*. — M. : Nauka, 1985. — 336 p. — (In Russian).
- Kleymenova N. G. *Geomagnetics Pulsations // Model of space. Volume 1*. — M. : MGU, 2007. — P. 611–626. — (In Russian).
- Liu J., Shikawa K., Oyama S.-I., et al. A Statistical Study of Longitudinal Extent of Pc1 Pulsations Using Seven PWING Ground Stations at Subauroral Latitudes // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2023. — Vol. 128, no. 1. — <https://doi.org/10.1029/2021ja029987>.
- Makur A. *A Study of Local Approximation in Information Theory*. — Massachusetts Institute of Technology, 2015. — 171 p.
- Mallat S. *A wavelet tour of signal processing. Second Edition*. — Academic Press, 1999. — 671 p.
- Matsuda S., Miyoshi Y., Kasahava Y., et al. Multipoint Measurement of Fine-Structured EMIC Waves by Arase, Van Allen Probe A, and Ground Stations // *Geophysical Research Letters*. — 2021. — Vol. 48, no. 23. — <https://doi.org/10.1029/2021gl096488>.
- Mikhailova O. S., Klimushkin D. Yu. and Mager P. N. The current state of the theory of Pc1 range ULF pulsations in magnetospheric plasma with heavy ions: A review // *Solnechno-Zemnaya Fizika*. — 2022. — Vol. 8, no. 1. — P. 3–18. — <https://doi.org/10.12737/szf-81202201>. — (In Russian).
- Nie Y., Wang Y., Sun W., et al. The Local Approximation Method for Structural Optimization // *Applied Mechanics and Materials*. — 2014. — Vol. 575. — P. 854–858. — <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.575.854>.
- Pozdnyakova D. D., Pilipenko V. A., Nose M., et al. Satellite and ground-based observations of Pc1 pulsations during a magnetic storm in March 2023 // *Solnechno-Zemnaya Fizika*. — 2025. — Vol. 11, no. 2. — P. 56–68. — <https://doi.org/10.12737/szf-112202505>. — (In Russian).
- Savelyev I. V. *Physics A General Course. Volume 1. Mechanics, Molecular Physics*. — M. : Mir, 1979. — 439 p.
- Time-Frequency Analysis* / ed. by F. Hlawatsch and F. Auger. — London UK, Hoboken USA : John Wiley & Sons, 2013. — 472 p.
- Yin Z.-F., Zhou X.-Z., Hu Z.-J., et al. Westward Excursion of Pc1/EMIC Waves and Their Source Protons: Paradoxical Observations From Ground and Space // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2024. — Vol. 129, no. 5. — <https://doi.org/10.1029/2023ja032317>.