

О НОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

И. Э. Степанова^{1,*} , И. И. Колотов² , А. В. Щепетилов² 

¹Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Российская Федерация

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Российская Федерация

* Адрес для корреспонденции: Инна Эдуардовна Степанова, tet@ifz.ru

Аннотация: В работе рассматривается методика нахождения решения прямых и обратных задач гравиметрии с помощью аппарата собственных функций оператора Лапласа в областях со сложной структурой. Данные дистанционного зондирования Земли и планет представляют собой огромные массивы информации дискретного (зачастую – в виде цепочки битов) характера. Теория дискретного потенциала позволяет с достаточно высокой степенью надёжности восстанавливать эквивалентные по внешнему полю, осложнённой случайной помехой, сеточные распределения масс, а также решать различные прямые и обратные задачи гравиметрии. Построение собственных функций дискретного аналога оператора Лапласа в трёхмерных областях со сложной структурой избавляет от необходимости многократного нахождения решений плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Ключевые слова: дискретный потенциал, сложная геологическая структура, собственные функции оператора Лапласа

Цитирование: Степанова И. Э., Колотов И. И., Щепетилов А. В. О новом подходе к решению задач гравиметрии в рамках теории дискретного потенциала // Russian Journal of Earth Sciences. — 2026. — Т. 26. — ES3009. — DOI: 10.2205/2026es001083 — EDN: ZQVNLH

1. Введение

При решении прямых и обратных задач геофизики применяется обширный «арсенал» методов: от интегральных уравнений и представлений [Stepanova and Strakhov, 2002] до разложения в ряд по ортонормированной системе функций (например, разложение по нормированным сферическим гармоникам) и вейвлет-анализа [Cain et al., 1989; Dymant and Arkani-Hamed, 1998; Emilia, 1973; Frik et al., 2022; Hood et al., 2018; Langlais et al., 2004; Martyshko et al., 2018a,b; Mikhailov et al., 2019; Thébaud et al., 2006; Uno et al., 2009]. Объединяет все существующие методики необходимость обращаться к тем или иным системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые могут отличаться своими свойствами, но, как правило, всегда являются большими и сверхбольшими и поэтому зачастую требуют разработки специфических алгоритмов для получения устойчивого к помехам в правой части приближённого решения.

В конце прошлого века В. Н. Страхов предложил способ интерпретации геофизических данных, основанный на методе Пуанкаре выметания объёмных распределений на границу области в трёхмерном пространстве [Страхов, 1977]. При таком подходе многократно решать прямые задачи не требуется: сравниваются не поля, генерируемые источниками, а «выметанные» (фактически – полученные в результате решения некоторого дискретного аналога уравнения диффузии) значения распределений масс (магнитных моментов, зарядов и т.п.) на границе рассматриваемого объёма.

В настоящей работе описана методика решения прямых и обратных задач дискретного гравитационного потенциала, в которой ключевым моментом является нахождение собственных функций дискретного аналога оператора Лапласа в областях

RESEARCH ARTICLE

<https://elibrary.ru/ZQVNLH>

Получено: 2 сентября 2025 г.

Принято: 10 ноября 2025 г.

Опубликовано: 11 августа 2026 г.



© 2026. Коллектив авторов.

со сложной геологической структурой. В [Stepanova and Kolotov, 2024] был описан вариационно-комбинаторный подход при работе с областями такого типа. Так же, как и в указанной статье, будем понимать под областью со сложной структурой прямоугольный параллелепипед (в частном случае – куб с ребром l), в котором имеется N полостей, представляющих собой параллелепипеды (или кубы) меньшего размера. Безусловно, реальные источники полей могут существенно отличаться своей формой и другими признаками от рассматриваемой нами идеализации. Но выбор куба с «вырезами» в качестве основного объекта исследования продиктован необходимостью получения аналитического решения или, по крайней мере, максимально возможным упрощением алгоритмов вычисления компонент полей и эквивалентных по этим внешним полям распределений источников.

Предлагаемые в работе подходы и методы могут применяться при уточнении существующих и создании новых аналитических моделей физических полей Земли и планет Солнечной системы. Без моделей полей, адекватных геофизической практике, на наш взгляд, геологическая интерпретация данных становится весьма проблематичной.

Как и в работе [Stepanova and Kolotov, 2024], метод линейных интегральных представлений [Stepanova and Strakhov, 2002] выступает теперь в качестве основного средства контроля получаемых результатов. При построении в рамках указанного метода модифицированных S -аппроксимаций элементов гравитационного поля находятся двумерные распределения источников (мы их рассмотрим на семействе плоскостей и будем использовать декартову систему координат во всех случаях) – специфические «проекции» реального трёхмерного объекта на некоторые двумерные многообразия, местоположение которых сначала задаётся исследователем, а затем уточняется в ходе решения обратной задачи. Метод интегральных представлений позволяет решать как линейные (когда неизвестно распределение источников внутри некоторого рудного тела или в слое бесконечного простираения – в случае структурных обратных задач), так и нелинейные обратные задачи гравиметрии. Как известно [Баранов, 2016; Блинова, 2021], анализ горизонтального градиента гравитационного поля может применяться при сейсмическом районировании, поскольку обращение в нуль модуля горизонтального градиента указывает на вероятный разлом в земной коре. Таким образом, как уже существующие, так и новые методики интерпретации гравиметрических данных представляют интерес не только в плане определения возможных источников гравитационных аномалий, но и для выявления геодинамически неустойчивых зон.

В настоящей работе мы опишем постановки задач гравиметрии в рамках теории дискретного потенциала [Страхов и др., 1996; Arsanukaev, 2004]; при этом должно быть определено единое для источников и физических полей сеточное пространство, система координат, норма элементов, операторы, действующие на сеточном пространстве и т.п. Мы уже отмечали в [Stepanova and Kolotov, 2024], что любое сеточное пространство идентифицируется по шагам сетки (при этом фиксируется начало координат). Все операции над векторами сеточного пространства сводятся к сложению, вычитанию и умножению на элементы основного поля (над которым это пространство определено). После того как будут найдены собственные функции дискретного аналога оператора Лапласа на некотором множестве «канонических» областей (в качестве таковых у нас будут выступать прямоугольные параллелепипеды в трёхмерном сеточном пространстве с заданным числом полостей, также имеющих форму прямоугольных параллелепипедов), любую задачу теории дискретного гравитационного потенциала можно будет свести к выполнению ряда простых операций над векторами, представляющими собой набор значений элемента поля в узлах сетки. Для контроля качества решения прямых и обратных задач можно, как уже упоминалось выше, применить метод интегральных представлений: он позволяет восстановить эквивалентные по внешнему полю распределения сеточных масс на заданном множестве носителей. Собственные функции дискретного аналога оператора Лапласа «избавляют» исследователя от необходимости многократно (!) решать разреженные СЛАУ большой и сверхбольшой размерности. Именно такие системы возникают при применении

в теории дискретных потенциалов метода матричной прогонки. Безусловно, один раз такую систему можно решить. Но на семействе расширяющихся компактов, которое может аппроксимировать неограниченное трёхмерное сеточное пространство, приходится ставить различные граничные условия. Поэтому любая вариационная постановка обратной задачи в рамках теории дискретного потенциала потребует достаточно много раз решать СЛАУ с числом неизвестных, достигающих нескольких миллионов.

В. Н. Страхов доказал в [Страхов, 1977], что существует несчётное множество эквивалентных по внешнему гравитационному полю трёхмерных непрерывных распределений масс, не отличающихся какой бы то ни было симметрией. При решении подавляющего большинства обратных задач геофизики достаточно нахождения некоторого множества оптимальных решений (можно назвать их также «пробными»). Однако всегда исследователи должны выделять элементы массива данных, критически необходимые для уточнения существующей или создания новой аналитической модели физического поля. Таким образом, любые алгоритмы интерпретации информации, полученной благодаря дистанционному зондированию Земли и планет Солнечной системы, должны включать в себя процедуры отбора и анализа данных по чётко выверенным критериям. Дискретный гравитационный потенциал может рассматриваться как удобный инструмент при оперировании с огромными массивами быстро меняющихся разнородных и разноточных данных.

2. Прямые и обратные задачи дискретного гравитационного потенциала в декартовой системе координат для многосвязных областей

В [Страхов и др., 1996; Arsanukaev, 2004] описаны основы теории дискретных гравитационного и магнитного потенциалов, а также приведены примеры постановок вариационных задач по определению гравитационного и магнитного полей в сеточных пространствах. В настоящем разделе мы напомним читателю, какие области и объекты рассматриваются в дискретном случае, а также опишем применявшиеся ранее алгоритмы решения условно «прямых» задач дискретного гравитационного потенциала.

Аналогами операторов Лапласа и Пуассона в сеточном пространстве $X_n^{(S)}$ (n измерений) являются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Lambda\{V_S(x^{(S)})\} &= 0; \\ \Lambda\{V_S(x^{(S)})\} &= -\frac{GC_n m_S(x^{(S)})}{H^{n-2}}, \quad H = \left(\prod_{k=1}^n h_k\right)^{\frac{1}{n}}, \quad m_S(x^{(S)}) = H^n \rho(x^{(S)}).\end{aligned}\quad (1)$$

В (1) Λ – выбранный конечно-разностный аналог оператора Лапласа, а $m_S(x^{(S)}) = H^n \rho(x^{(S)})$ – значения сеточных масс, порождающих сеточное гравитационное поле; h_k – шаг по k -му направлению в декартовой системе координат; G – гравитационная постоянная; C_n – константа, зависящая от размерности пространства, в трёхмерном пространстве: $C_3 = 4\pi$.

Оператор Лапласа в (1) будем считать заданным на шаблоне «крест» [Самарский и Николаев, 1978]. Тогда для трёхмерного сеточного пространства будем иметь:

$$\begin{aligned}\Lambda^+(V_S(x^{(S)})) &= \sum_{p=1}^3 C_p \{V_S(x^{(S)} - h_p e_p) + V_S(x^{(S)} + h_p e_p) - 2V_S(x^{(S)})\} = 0, \\ C_p &= \frac{H^2}{h_p^2}, \quad H = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}, \quad x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}), \quad x_p^{(S)} = k h_p, \quad -K \leq k \leq +K; \\ h_p &= \text{const}, \quad p = 1, 2, 3; \quad |x_p^{(S)}| \leq d_p = K h_p, \quad p = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (2)$$

Фактически, уравнение (1) является функциональным относительно $V_S(x^{(S)})$ – сеточной функции, описывающей дискретный гравитационный потенциал. Разумеется, вид функционального уравнения зависит от шаблона, на котором рассматривается оператор Лапласа.

Трёхмерное сеточное пространство (т.е. неограниченное множество точек $x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \dots, x_n^{(S)})^T$, $x_k^{(S)} = ph_k$; $-\infty < p < +\infty$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $h_k = \text{const}$) аппроксимируется семейством расширяющихся компактов, представляющих собой прямоугольные параллелепипеды: $|x_p^{(S)}| \leq d_p = K_n h_p$, $p = 1, 2, 3$.

Здесь d_p , K_n и h_p , $p = 1, 2, 3$, – некоторые положительные константы, причём $K_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Из соотношений (1)–(2) следует, что дискретный потенциал – это некоторая сеточная функция, определённая, вообще говоря, во всем трёхмерном сеточном пространстве. В местах расположения источников поля эта функция удовлетворяет уравнению Пуассона; в дополнительной к носителю масс области дискретный потенциал – гармоническая функция (в конечно-разностном, разумеется, смысле). Подчеркнём, как и в [Stepanova and Kolotov, 2024], что граничные условия и характер изменения дискретного потенциала на бесконечности неизвестны.

Введём следующие обозначения для сеток в трёхмерном и двумерном пространствах:

$$\begin{aligned}\omega_3 &= (ih_1, jh_2, kh_3), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\ \omega &= (ih_1, jh_2), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1; \\ \gamma_3 &= (0, jh_2, kh_3) \cup (N_1, jh_2, kh_3) \cup (ih_1, 0, kh_3) \cup (ih_1, N_2, kh_3) \cup (ih_1, jh_2, 0) \cup (ih_1, jh_2, N_3), \quad (3) \\ &1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\ \gamma &= (0, jh_2) \cup (N_1, jh_2) \cup (ih_1, 0) \cup (ih_1, N_2), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1.\end{aligned}$$

Таким образом, мы задали равномерные сетки в трёхмерном и двумерном пространствах (ω_3, ω) , а также обозначили границы соответствующих областей.

Напомним читателю соответствующую дифференциально-разностному оператору в (1) схему матричной прогонки [Самарский и Николаев, 1978]:

$$\begin{aligned}-\mathbf{A}_k \mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{C}_k \mathbf{Y}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{Y}_{k+1} &= \mathbf{F}_k, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1, \\ \mathbf{C} \mathbf{Y} &= (\Lambda \mathbf{y}_1, \Lambda \mathbf{y}_2, \dots, \Lambda \mathbf{y}_{N_2-1}), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_2-1}), \\ \mathbf{y}_j &= (y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{N_1-1,j}), \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ \Lambda \mathbf{y}_j &= (\Lambda_1 y_{1,j}, \Lambda_1 y_{2,j}, \dots, \Lambda_1 y_{N_1-1,j}), \\ \Lambda_1 y_{i,j} &= 2y_{i,j} - C_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1; i, j} - C_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2; i, j}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1; \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1.\end{aligned} \quad (4)$$

В (4) через $\mathbf{Y}_k$ обозначен блочный вектор значений сеточной функции в слое, соответствующем значению третьей координаты $x_3^{(S)} = kh_3$, $1 \leq k \leq N_3 - 1$. $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ – в общем случае, прямоугольные матрицы. Правые части $\mathbf{F}_k$ при изменении индекса $1 \leq k \leq N_3 - 1$ – это значения некоторой сеточной функции в соответствующих точках в случае уравнения Пуассона и нули, если мы рассматриваем уравнение Лапласа, константа C_3^2 определяется в (2) (точнее говоря, это – квадрат C_3). К уравнениям (4) необходимо добавить граничные условия с тем, чтобы возникла постановка краевой задачи. Мы рассмотрим граничные условия первого рода:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{Y}_{N_3} = \mathbf{F}_{N_3}. \quad (5)$$

Формулы матричной прогонки имеют вид:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1} \mathbf{B}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_3 - 1, \quad \alpha_1 = \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{B}_0; \\ \beta_{k+1} &= (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1} (\mathbf{F}_k + \mathbf{A}_k \beta_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_3, \quad \beta_1 = \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{F}_0; \\ \mathbf{Y}_k &= \alpha_{k+1} \mathbf{Y}_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k = N_3 - 1, N_3 - 2, \dots, 0, \quad \mathbf{Y}_{N_3} = \beta_{N_3+1},\end{aligned}\quad (6)$$

причём алгоритм (6) корректен, если матрицы $(\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1}$ не вырождены для $k = 1, 2, \dots, N_3$.

Матрицы $\mathbf{C}_k$ могут иметь разную размерность при наличии лакун в области задания дискретного потенциала, как мы уже отмечали это в [Stepanova and Kolotov, 2024].

Таким образом, уравнение (1), дополненное граничными условиями на элементах семейства расширяющихся компактов (при этом внутри большого куба могут располагаться полости – все определяется спецификой прямой или обратной задачи), может быть решено с помощью метода матричной прогонки. Сама же СЛАУ в (4) является разреженной и, в большинстве случаев, имеет весьма внушительную размерность (порядка 10^6).

При решении прямых и обратных задач в рамках теории дискретного гравитационного потенциала необходимо выделить из несчётного множества решений уравнения (1) или (2) в некотором смысле оптимальный вектор. Меткие определения постановок прямых и обратных задач мы привели в [Stepanova and Kolotov, 2024], однако, в настоящей работе ниже будет ещё раз сделан акцент на своеобразную условность понятий такого рода.

В трёхмерном сеточном пространстве можно определить некоторую сеточную область, в которой будем искать дискретный потенциал. Обозначим эту область через D_S .

В D_S попадает часть узлов равномерных трёхмерных и двумерных равномерных сеток (3). Можно сказать, что вектора сеточного пространства принадлежат этой области: $x^{(S)} \in D_S$. Далее, зададим $E(D_S)$ – евклидову норму в сеточной области D_S и $\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ – неотрицательный функционал на векторах одинаковой размерности $\mathbf{t}$ и $\mathbf{z}$. Допустим также, что носители масс $m_S(\xi^{(S)})$ содержатся в некотором подмножестве точек сеточного пространства: $\xi^{(S)} \in J_S$. $\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ часто представляет собой квадрат евклидовой нормы разности между значениями дискретного потенциала $V_S(x^{(S)})$ и значениями в тех же точках заданной функции $g_S(x^{(S)})$ – таким образом, этот функционал как бы «оценивает» качество найденного с помощью той или иной методики дискретного гравитационного потенциала в точках области D_S .

Как и ранее, запишем дискретный потенциал в следующем виде:

$$V_S(x^{(S)}) = \sum_{\xi^{(S)} \in J_S} m_S(\xi^{(S)}) \Omega_n^{(S)}(x^{(S)} - \xi^{(S)}). \quad (7)$$

Сеточное фундаментальное решение оператора Лапласа $\Omega_n^{(S)}(x^{(S)})$ определяется из соотношений:

$$\Delta \left(\Omega_n^{(S)}(x^{(S)}) \right) = -\frac{C_n}{H^{n-2}} e(x^{(S)}), \quad (8)$$

$$\Omega_n^{(S)}(x^{(S)})|_{x^{(S)} \in \partial K_{et}} = \Omega_{n,c}(x^{(S)}). \quad (9)$$

В (7) J_S есть совокупность векторов координат $\xi^{(S)}$ тех узлов сетки, в которых имеются ненулевые сеточные массы; иначе говоря, J_S – это сеточный носитель источников поля.

Однозначная разрешимость задачи (8)–(9) гарантируется заданием граничных условий первого или второго рода в некоторой совокупности узлов сетки.

В качестве границы возьмём границу «эталонного» куба K_{et} с центром в начале координат и ребром 200 км.

$$\Omega_n^{(S)}(x^{(S)}) \Big|_{x^{(S)} \in \Gamma K_{et}} = \Omega_{n,c}(x^{(S)}), \quad (10)$$

где $\Omega_{n,c}(x^{(S)})$ – континуальное решение уравнения Лапласа; ΓK_{et} – граница эталонного куба.

Для обеспечения устойчивости приближенного решения системы (8)–(10) можно также потребовать, чтобы сеточный аналог фундаментального решения уравнения Лапласа доставлял минимум некоторому функционалу качества, например, такому:

$$F[\Omega_3^{(S)}(x^{(S)})] = \sum_{x^{(S)} \in S_{+++}^3} \left(\frac{\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) - \Omega_{3,c}(x^{(S)})}{\Omega_{3,c}(x^{(S)})} \right)^2, \quad (11)$$

где $\Omega_{3,c}(x^{(S)})$ – значения континуального фундаментального решения уравнения Лапласа в точках сеточной области. В (11) $S_{+++}^3 = \{x^{(S)} : x_i^{(S)} \geq 0 \ (i = 1, 2, 3), \ x_1^{(S)} \leq x_2^{(S)} \leq x_3^{(S)}\}$.

Из вышеизложенного можно сделать вывод о том, что для определения гравитационного потенциала, создаваемого распределением масс в J_S , необходимо решить систему уравнений (8)–(11), а затем вычислить потенциал по формуле (7). Можно, однако, искать решение уравнения (1) при некоторых граничных условиях (или систему (4)–(5)).

Такие постановки можно условно назвать прямыми задачами дискретного гравитационного потенциала.

Обратная линейная задача дискретного гравитационного потенциала может быть сформулирована так.

Найти распределение масс в J_S по известному дискретному гравитационному потенциалу $V_S(x^{(S)})$, если сеточное фундаментальное решение удовлетворяет соотношениям (8)–(11). Гравитационный потенциал при этом представляется в виде суммы (7).

Замечание. Вместо гравитационного потенциала можно, безусловно, рассмотреть и его сеточные производные.

Нужно подчеркнуть, что, в отличие от континуального случая, пространственное распределение значений некоторого элемента дискретного поля не может быть найдено в результате решения «чисто прямой» задачи, даже при наличии точной информации о величине и локализации источников, поскольку для значений сеточного фундаментального решения в узлах сети (см. (8)), нет аналитического выражения.

Сеточное фундаментальное решение было вычислено А. Н. Левашовым [Stepanova et al., 2025] в эталонном кубе с точностью $\eta = 1 \cdot 10^{-8}$.

Мы описали в [Stepanova и Колотов, 2025] условия применимости метода матричной прогонки в частном случае, когда сеточная область представляет собой параллелепипед с несколькими вырезами (для простоты изложения предположим, что вырезы – также прямоугольные параллелепипеды).

Для анализа корректности метода матричной прогонки необходимо оценить собственные значения оператора Лапласа в канонической области (точнее говоря, собственные значения оператора, связанного с двумерным дискретным аналогом оператора Лапласа).

В общем случае некоторая сеточная область $G_{3,cut}$, имеющая столько же связных компонент границы, сколько их имеет куб с L кубическими вырезами, может быть аппроксимирована, условно говоря, «канонической областью» – кубом с соответствующим числом полостей.

Важно отметить, что грани самого объемлющего куба, равно как и грани полостей, должны быть параллельны координатным плоскостям. Для этого можно описать

вокруг внешней границы области $G_{3,\text{cut}}$ куб, а внутрь каждого выреза, наоборот, вписать кубик с ребром, меньшим, чем диаметр соответствующего выреза (см. рис. 1). Можно заменить кубы в определении канонической области прямоугольными параллелепипедами – это не имеет принципиального значения.

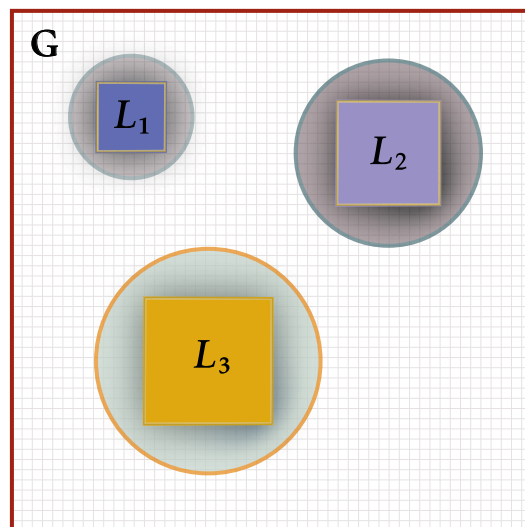


Рис. 1. Область G с лакунами L_1, L_2, L_3 .

Условия Дирихле на границе области перейдут на граничные условия первого рода на гранях описанного и вписанных кубов. Тогда можно будет решать дискретные прямые и обратные задачи гравитационного потенциала в канонической области. Собственные значения оператора Лапласа при условиях Дирихле на всех компонентах границы «многосвязной» канонической области дадут оценку собственных значений в исходной области $G_{3,\text{cut}}$.

Напомним, что, согласно общей теории линейных операторов [Самарский и Николаев, 1978], собственные значения матрицы оператора Λ_1 определяются из соотношения Рэлея:

$$\lambda = \sup_{\|x^{(s)}\|_E=1} \frac{\|Ax^{(s)}\|_E}{\|x^{(s)}\|_E}. \quad (12)$$

В (12) норма порождается скалярным произведением векторов евклидова пространства:

$$\|x^{(s)}\|_E = \sqrt{(x^{(s)}, x^{(s)})}. \quad (13)$$

В (13) через $(x^{(s)}, y^{(s)})$ обозначено скалярное произведение векторов сеточного пространства, равное сумме произведений соответствующих компонент.

Если для самосопряжённого оператора A имеют место неравенства [Страхов и др., 1996]

$$C_1 \delta(u, u) \leq (Au, u) \leq C_2 \Delta(u, u), \quad (14)$$

то собственные значения этого оператора лежат в диапазоне

$$C_1 \delta \leq \lambda_A \leq C_2 \Delta. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) могут служить оценками собственных значений дискретного аналога оператора Лапласа в канонической области при рассмотрении задачи Дирихле.

Скалярное произведение сеточных функций одной переменной можно ввести так же, как это было сделано в [Самарский и Николаев, 1978]:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u(i)v(i)h + 0,5[u(0)v(0) + u(N)v(N)]. \quad (16)$$

В (16) сеточные функции заданы на одномерной сетке с шагом h , при этом число узлов равно N . В трёхмерном сеточном пространстве получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} (u, v) = & \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \sum_{m=1}^{N_3-1} u(k, l, m)v(k, l, m)h_1h_2h_3 + \\ & 0,5 \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \{u(k, l, 0)v(k, l, 0) + u(k, l, N_3)v(k, l, N_3)\} \right] + \\ & 0,5 \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_3-1} \{u(k, 0, m)v(k, 0, m) + u(k, N_2, m)v(k, N_2, m)\} \right] + \\ & 0,5 \left[\sum_{m=1}^{N_3-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \{u(0, l, m)v(0, l, m) + u(N_1, l, m)v(N_1, l, m)\} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Формула (17) понадобится нам в дальнейшем, но в несколько модифицированном виде: граничные значения функций мы исключим из определения скалярного произведения.

Метод линейных интегральных представлений [Степанова и Колотов, 2025; Stepanova and Kolotov, 2024; Stepanova and Strakhov, 2002] позволяет с высокой точностью аппроксимировать элементы внешних потенциальных полей потенциалами простого и двойного слоёв, распределённых на некоторых носителях. Если такие эквивалентные по внешнему полю распределения масс или магнитных моментов (в случае магнитного поля) найдены, то мы можем считать известными граничные значения дискретного потенциала, фигурирующие в (5) и необходимые для применения метода матричной прогонки. Помимо этого, известные вне носителей значения дискретного гравитационного потенциала входят в левую часть (7) при постановке обратной задачи.

3. Алгоритм нахождения решения прямых и обратных задач дискретного гравитационного потенциала с помощью собственных функций дискретного аналога оператора Лапласа

В предыдущем разделе были подробно описаны постановки прямых (хотя и с некоторой оговоркой) и обратных задач дискретного гравитационного потенциала. Основной вывод, который следует из вышеизложенного, можно сформулировать так: распределение значений дискретного гравитационного потенциала в некоторой канонической сеточной области находится однозначно с помощью корректного алгоритма матричной прогонки. При этом возникает необходимость многократного решения задачи (4)–(5) при различных граничных условиях, а также постановки (8)–(11) для расчёта значений сеточного фундаментального решения на семействе расширяющихся компактов. Оптимальное решение задачи (4)–(5) должно доставлять минимум функционалу качества решения $\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$.

Теперь попытаемся выяснить, возможна ли альтернатива такому затратному механизму отыскания решения прямой или обратной задачи в канонической многосвязной области.

Сформулируем сначала прямую и обратную задачу теории дискретного гравитационного потенциала в рамках новой методики.

Прямая задача.

Дано: многосвязная сеточная область $G_{3,\text{cut}}$ (гомеоморфная шару с L вырезами). Внутри области требуется найти распределение значений потенциала при условиях Дирихле на границе области. Таким образом, нужно решить уравнение

$$\begin{aligned}\Delta\{V_S(x^{(S)})\} &= f(x^{(S)}), \quad x^{(S)} \in G_{3,\text{cut}}; \\ V_S(x^{(S)})|_{x^{(S)} \in \partial G_{3,\text{cut}}} &= 0.\end{aligned}\quad (18)$$

Значения $f(x^{(S)})$ считаются известными всюду внутри области $G_{3,\text{cut}}$.

Обратная задача.

Дано: та же самая многосвязная сеточная область $G_{3,\text{cut}}$ (гомеоморфная шару с L вырезами). Внутри области известно распределение значений потенциала, при этом на границе области потенциал обращается в нуль. Найти нужно $f(x^{(S)})$ – правую часть уравнения (18).

Принципиальное отличие новой методики от описанной выше: решения прямой и обратной задачи должны быть получены без многократного вычисления значений дискретного аналога оператора Лапласа (при наличии нескольких правых частей в (18)) и без многократного применения метода матричной прогонки.

Возможный путь решения поставленных задач заключается в следующем.

Рассмотрим в этой области задачу на собственные значения для конечно-разностного аналога оператора Лапласа при условиях Дирихле на всех компонентах границы области. В большом кубе задача на собственные значения (ЗСЗ) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta y(x) + \lambda_l y(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \omega, \quad \Delta = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z; \\ y(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \gamma; \\ y_{ijk} &= y(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2, \quad x_{3,k} = kh_3; \\ \Delta_x \mu_{l_1}^{(1)} + \lambda_{l_1}^{(1)} \mu_{l_1}^{(1)} &= 0, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1; \\ \Delta_y \mu_{l_2}^{(2)} + \lambda_{l_2}^{(2)} \mu_{l_2}^{(2)} &= 0, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1; \\ \Delta_z \mu_{l_3}^{(3)} + \lambda_{l_3}^{(3)} \mu_{l_3}^{(3)} &= 0, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\ \mu_{l_1}^{(1)}(0) = \mu_{l_1}^{(1)}(N_1) = 0 &= \mu_{l_2}^{(2)}(0) = \mu_{l_2}^{(2)}(N_2) = \mu_{l_3}^{(3)}(0) = \mu_{l_3}^{(3)}(N_3); \\ \lambda_{l_\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{l_\alpha \pi}{2N_\alpha}\right) = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{l_\alpha \pi h_\alpha}{2d_\alpha}\right), \quad l_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1; \\ \mu_{l_1}^{(1)}(i) &= \sqrt{\frac{2}{d_1}} \sin\left(\frac{l_1 \pi i}{N_1}\right), \quad l_1 = 1, \dots, N_1 - 1; \\ \mu_{l_2}^{(2)}(j) &= \sqrt{\frac{2}{d_2}} \sin\left(\frac{l_2 \pi j}{N_2}\right), \quad l_2 = 1, \dots, N_2 - 1; \\ \mu_{l_3}^{(3)}(k) &= \sqrt{\frac{2}{d_3}} \sin\left(\frac{l_3 \pi k}{N_3}\right), \quad l_3 = 1, \dots, N_3 - 1; \\ y_{ij} &= \mu_{l_1}^{(1)}(i) \cdot \mu_{l_2}^{(2)}(j) \cdot \mu_{l_3}^{(3)}(k); \\ \Delta_x y_{ijk} &= \frac{1}{h_1^2} [y_{i+1,j,k} - 2y_{ijk} + y_{i-1,j,k}], \quad \Delta_y y_{ijk} = \frac{1}{h_2^2} [y_{i,j+1,k} - 2y_{ijk} + y_{i,j-1,k}]; \\ \Delta_z y_{ijk} &= \frac{1}{h_3^2} [y_{ij,k+1} - 2y_{ijk} + y_{ij,k-1}].\end{aligned}\quad (19)$$

Формулы (19) выписаны для параллелепипеда с центром в нуле и рёбрами d_1, d_2, d_3 . В случае куба все эти числа совпадают.

Само же собственное значение равно

$$\lambda_l = C_3^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{l_\alpha}^{(\alpha)}. \quad (20)$$

Для каждого из параллелепипедов (в частном случае – кубов), определяющих многосвязную область, собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{l_{\alpha,s}}^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{l_{\alpha,s} \pi}{2N_{\alpha,s}} \right) = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{l_{\alpha,s} \pi h_\alpha}{2d_{\alpha,s}} \right), \quad l_{\alpha,s} = 1, 2, \dots, N_{\alpha,s} - 1; \\ \mu_{l_{1,s}}^{(1)}(i) &= \sqrt{\frac{2}{d_{1,s}}} \sin \left(\frac{l_{1,s} \pi i}{N_1} \right), \quad l_{1,s} = 1, \dots, N_{1,s} - 1; \\ \mu_{l_{2,s}}^{(2)}(j) &= \sqrt{\frac{2}{d_{2,s}}} \sin \left(\frac{l_{2,s} \pi j}{N_{2,s}} \right), \quad l_{2,s} = 1, \dots, N_{2,s} - 1, \quad s = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому для всей многосвязной области собственными функциями и собственными значениями будут только те объекты (21), для которых выполняются соотношения $\frac{l_{\alpha,s}}{N_{\alpha,s}} = \text{const}$, $\alpha = 1, 2, 3$; $s = 1, \dots, L$.

Например, если отношение стороны маленького куба к стороне большого (вмещающего) куба равно $1/3$, то собственными функциями будут только те, у которых $\frac{l_{\alpha,s}}{N_{\alpha,s}} = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1, 2, 3$; $s = 1, \dots, L$. Заметим, что шаги сетки h_α , $\alpha = 1, 2, 3$, для многосвязной области во всех компонентах связности одинаковы для данного направления.

Новый алгоритм решения прямых и обратных задач в рамках теории дискретного гравитационного потенциала предполагает не только нахождение собственных функций конечно-разностного аналога оператора Лапласа в некоторых канонических многосвязных областях, но и выбор самих этих областей на основе априорной информации о геологическом строении среды. Поясним, что имеется в виду. Если отношение сторон маленького куба (одного из фиксированного множества) и большого, «объемлющего», куба является рациональным числом: $\frac{d_s}{d} = \frac{m_s}{n_s}$, $s = 1, 2, \dots, L$, то собственная функция оператора Лапласа для большого куба будет также собственной функцией в полости тогда, когда номер гармоники кратен знаменателю указанного рационального числа. Если же такое соотношение иррационально, то следует найти рациональное приближение отношения рёбер кубов одним из двух способов, которые мы сейчас опишем (конечно, можно выбрать и другие).

I. Способ приближения отношения рёбер кубов рациональным числом.

1. Для каждого $N = 2, 3, \dots, N_{\max}$ вычислим отношение $\frac{d}{N}$.
2. Из множества $m = 1, 2, \dots, N - 1$ выберем такое m_N , что $\frac{d_s}{d} - \frac{m_N}{N} = \min m_s$.
3. Возвращаемся к шагу 1.

II. Способ приближения отношения рёбер кубов с помощью непрерывных дробей.

В этом случае можно воспользоваться алгоритмом приближенного представления вещественного числа рациональным с помощью непрерывных (цепных) дробей.

Эйлер предложил следующий способ нахождения подходящей цепной дроби.

Пусть нам нужно записать число t в виде непрерывной дроби: $t = [t_0; t_1, t_2, \dots]$.

Положим

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, \quad p_0 = t_0, \quad p_i = t_0 p_{i-2} + p_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots; \\ q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1, \quad q_i = t_0 q_{i-2} + q_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда подходящая дробь $\frac{p_i}{q_i}$ будет приближать число $t = [t_0; t_1, t_2, \dots]$ с точностью до $\frac{1}{q_i q_{i-1}}$.

После того как будут найдены рациональные приближения к координатам вершин кубов, ограничивающих полости в большом кубе, необходимо решить следующую принципиально важную для приложений проблему: определить, какими лакунами можно «пожертвовать», не слишком теряя в точности аппроксимационной конструкции. Поясним, что имеется в виду. Можно объединить несколько полостей в одну, если лакуны расположены близко друг к другу (т.е. расстояние между какими-то двумя гранями соседних лакун не превышает десяти-пятнадцати процентов от диаметра лакуны меньшего размера) и имеется априорная информация о том, что принципиальной разницы в геологическом строении среды в районе их расположения нет (пример близко расположенных лакун приведён на рис. 2). Допустимо также вообще не рассматривать какие-то вырезы или считать, что какие-то грани лакун лежат на гранях объемлющего куба.

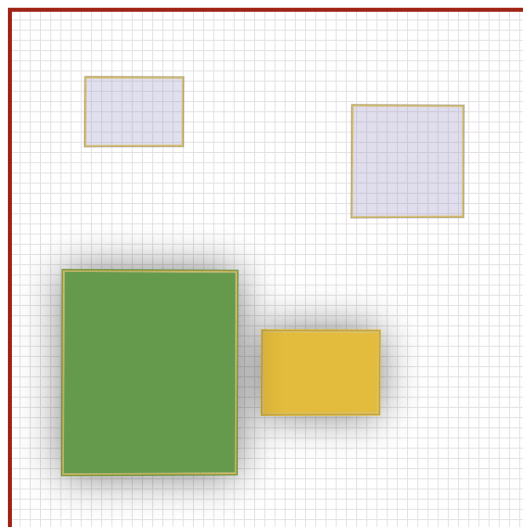


Рис. 2. Пример близкого расположения лакун.

После того как будут найдены собственные функции и собственные значения в кубе с вырезами (см. выражения (19)–(21)), прямая задача редуцируется к нахождению разложения известной сеточной функции $f(x^{(S)})$ по указанным собственным функциям (а именно: вычислению скалярного произведения векторов сеточного пространства). Значения потенциала могут быть потом записаны в виде:

$$\begin{aligned} \Lambda\{V_S(x^{(S)})\} &= f(x^{(S)}), \quad x^{(S)} \in G_{3,\text{cut}}; \\ V_S(x^{(S)})|_{x^{(S)} \in \partial G_{3,\text{cut}}} &= 0; \\ V_S(x^{(S)}) &= - \sum_{k=1}^K \frac{(f, u_k) u_k(x^{(S)})}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (22)$$

В (22) $u_k(x^{(S)})$ – собственная функция оператора Лапласа, а λ_k – соответствующее собственное значение. В дискретном случае число собственных функций конечно!

При рассмотрении обратных задач необходимо находить собственные функции оператора Лапласа в области, «заходящей» под землю: в противном случае правая часть в постановке (22) будет тождественно равна нулю в области задания потенциала. Но, в отличие от континуального аналога, дискретный потенциал может быть представлен в нижнем полупространстве формулой (7), которая позволяет легко вычислить значения элемента дискретного поля при известных сеточных массах и сеточном фундаментальном решении уравнения Лапласа.

Обратная задача, в свою очередь, сведётся к вычислению скалярных произведений дискретного потенциала и собственных функций:

$$f(x^{(s)}) = - \sum_{k=1}^K \lambda_k (V_S, u_k) u_k(x^{(s)}). \quad (23)$$

Заметим ещё раз, что мы специально ввели понятие «сложной геологической среды», чтобы выделить особенности изучаемого региона и учесть априорную информацию об источниках физических полей. Лакуны могут содержать внутри себя предполагаемые носители гравитирующих масс (магнитных моментов), а могут, наоборот, служить индикаторами отсутствия таковых – все зависит от конкретной постановки задачи. Нельзя найти решение прямой (а тем более – обратной!) задачи дискретного потенциала, раскладывая известные функции по собственным функциям конечно-разностного аналога оператора Лапласа в большом кубе с условиями Дирихле на его границе: это будет слишком грубое приближение к истинному решению. Покажем более строго, какую ошибку мы привносим в решение задачи дискретного потенциала, опуская или, напротив, добавляя гармоники в известную функцию. Для этого найдём скалярное произведение по формуле (17) двух различных собственных функций оператора Лапласа в дискретном случае:

$$\begin{aligned} (u, v) &= h_1 h_2 h_3 \sum_{l_1=1}^{N_1-1} \sum_{l_2=1}^{N_2-1} \sum_{l_3=1}^{N_3-1} \sin\left(\frac{l_1 \pi k}{N_1}\right) \sin\left(\frac{l_1 \pi m}{N_1}\right) \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{l_2 \pi p}{N_2}\right) \sin\left(\frac{l_2 \pi q}{N_2}\right) \sin\left(\frac{l_3 \pi r}{N_3}\right) \sin\left(\frac{l_3 \pi s}{N_3}\right) \\ &= \frac{h_1 h_2 h_3}{8} \sum_{l_1=1}^{N_1-1} \left\{ \cos\left(\frac{l_1 \pi (k-m)}{N_1}\right) - \cos\left(\frac{l_1 \pi (k+m)}{N_1}\right) \right\} \\ &\quad \cdot \sum_{l_2=1}^{N_2-1} \left\{ \cos\left(\frac{l_2 \pi (p-q)}{N_2}\right) - \cos\left(\frac{l_2 \pi (p+q)}{N_2}\right) \right\} \\ &\quad \cdot \sum_{l_3=1}^{N_3-1} \left\{ \cos\left(\frac{l_3 \pi (r-s)}{N_3}\right) - \cos\left(\frac{l_3 \pi (r+s)}{N_3}\right) \right\}; \\ h_i &= \frac{l}{N_i}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы вычислить произведение сумм в (24), достаточно вспомнить, что одномерная сумма может быть вычислена по следующей формуле:

$$\begin{aligned} h_1 \sum_{l_1=1}^{N_1-1} \sin\left(\frac{l_1 \pi k}{N_1}\right) \sin\left(\frac{l_1 \pi m}{N_1}\right) &= \frac{h_1}{2} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi(k-m)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(k-m)}{2N_1}\right)} \cos\left(\frac{\pi(k-m)(N_1+1)}{2N_1}\right) \right\} \\ &\quad - \frac{h_1}{2} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi(k+m)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(k+m)}{2N_1}\right)} \cos\left(\frac{\pi(k+m)(N_1+1)}{2N_1}\right) \right\} = 0, \quad k \neq m. \end{aligned}$$

При совпадении номеров гармоник получим:

$$(u, v) = \frac{d^3}{8}. \quad (25)$$

В (25) d – ребро большого куба.

Таким образом, можно констатировать, что метод собственных функций позволяет определять неоднородности геологической среды, описываемые суперпозицией

гармоник, соответствующих собственным функциям дискретного аналога оператора Лапласа для выбранной канонической многосвязной области. Иные гармоники метод «не видит». Поэтому важна априорная информация об изучаемом полигоне. Если лакуны расположены близко друг к другу или имеет место перекрытие одного выреза другим, можно попытаться, как уже указывалось выше, описать ансамбль неоднородностей одной лакуной.

4. Результаты математического эксперимента

Предлагаемая в статье новая методика представления решений прямых и обратных задач теории дискретного гравитационного потенциала была апробирована на модельных примерах. Мы выбрали эталонный куб с ребром 200 км. Начало координат совпадало с центром этого куба. Узлы сетки располагались в точках с целочисленными координатами внутри указанной области. Далее, генерировались многосвязные области, для которых и рассматривались задачи (22)–(23). Опишем процесс моделирования более подробно.

Сначала для некоторого распределения сеточных масс, расположенных в нижнем полупространстве, вычислялись значения z -компоненты гравитационного поля (см. Рисунки 3–4) в точках верхнего полупространства, лежащих внутри куба. Области, занятые источниками, симметрично относительно дневной поверхности (плоскости $z = 0$) отражались в верхнее полупространство. Затем находились пересечения образов источников с верхней половиной эталонного куба.

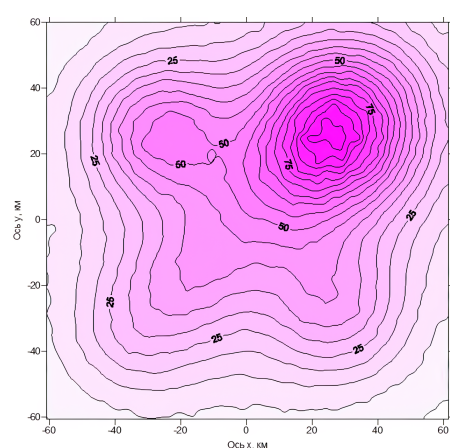


Рис. 3. Гравитационное поле в модельном пример № 1.

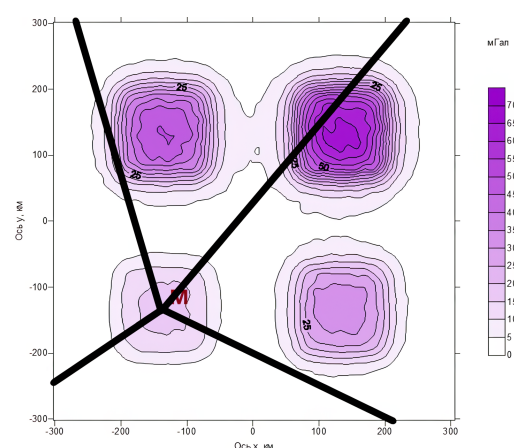


Рис. 4. Схематическое изображение построения вспомогательной функции для решения прямой задачи дискретного потенциала.

Области задания узлов наблюдений были «многосвязными»: они располагались либо в верхнем, либо в нижнем полупространстве и представляли собой прямоугольные параллелепипеды с вырезанными частями. Если вырезы находились в верхнем полупространстве (условно говоря, над землёй), то такая постановка может соответствовать задаче с пробелами в наборах данных. Если же вырезанные области содержали носители масс, то можно говорить об определении поля «под землёй», вблизи источников. Подчёркнём, в данной работе метод матричной прогонки применялся для поиска сеточного фундаментального решения в «целом» кубе. [Теорема 1 в Степанова и Колотов, 2025] гарантирует, что значения дискретного потенциала однозначно восстанавливаются в многосвязной области при известных распределениях источников и значениях потенциала на границах всех параллелепипедов, входящих в определение многосвязной области. В дальнейшем мы планируем провести математический эксперимент по решению задач в некоторых эталонных многосвязных областях.

В модельном примере № 1 аномальное гравитационное поле создавалось набором из четырёх прямых призм, нижние основания которых расположены на глубине 10 км под землёй, а верхние – на глубине 5 км.

Плотность вещества в призмах составляла $1,5 \text{ г/см}^3$.

Участок съёмки имел размеры $250 \times 250 \text{ км}$, рельеф местности выбирался ровным (перепад высот не превышал 250 метров). В поперечнике призмы были приблизительно 26 км. Поле призм, как и в работах [Степанова и Колотов, 2025; *Stepanova and Kolotov, 2024*], вычислялось непосредственно, как для континуального аналога, а также аппроксимировалось суммой простого и двойного слоёв, распределённых на нескольких горизонтальных плоскостях (в обоих модельных примерах их было 2), залегающих на глубинах от 100 метров до 1 км. Карта изолиний гравитационного поля призм приведена на рис. 3. Мы нашли значения гравитационного поля дискретного потенциала в точках многосвязных областей (включая границу) по (7). Помимо этого, мы посчитали значения гравитационного поля потенциала на нескольких горизонтальных плоскостях в верхнем полупространстве, используя решение обратной задачи, полученное с помощью метода модифицированных S -аппроксимаций (для контроля). В качестве входной информации при применении метода S -аппроксимаций, как было указано выше, мы брали значения гравитационного поля вертикальной производной потенциала в точках некоторого плавного рельефа. Значения самого потенциала не могут быть использованы для нахождения эквивалентного по внешнему полю распределения масс на горизонтальных плоскостях (в силу особенностей методики: интегралы в методе S -аппроксимаций расходятся при таком выборе ядра).

Нами были решены задачи (22) и (23) для многосвязной области в верхней части эталонного куба для функции, которая получается следующим образом. Гравитационное поле, создаваемое расположенными «под землёй» источниками, безусловно, не равно нулю тождественно на всех компонентах границы указанной области с лакунами. Чтобы применить описанную нами выше методику, нужно подобрать такую (достаточно гладкую, но для приложений степень этой гладкости особого значения не имеет) функцию, которая принимает на компонентах границы те же значения, что и гравитационный потенциал (или его производные). Такая вспомогательная функция может быть получена с помощью алгоритма, схематически показанного на рис. 4 (на карте изолиний гравитационного поля в модельном примере № 2 области, занятые призмами, трактуются как лакуны): выбираем внутри одной из полостей точку (она у нас обозначена как M), «выпускаем» лучи из этой точки до пересечения с какой-нибудь компонентой границы и линейно интерполируем заданную на границе функцию. Число лучей зависит от того, с какой точностью мы хотим решить задачу аппроксимации. Расстояние между двумя соседними лучами должно коррелировать с шагами сетки по трём направлениям. Мы как бы «раздуваем» по линейному закону граничную функцию в точки области, которые лежат на луче, связывающем две компоненты границы. Если область двухсвязная, то значения функции в точках каждого луча будут равны выпуклой линейной оболочке значений этой функции на каждой из двух компонент. После того как вспомогательная функция будет найдена, решается уравнение Пуассона (22) с правой частью, представляющей собой взятый со знаком минус лапласиан (точнее говоря, его дискретный аналог) от этой функции. Лапласиан вычисляется в точках сети наблюдений (т.е. это – вектор конечномерного сеточного пространства). Отсюда находится и сам изменённый дискретный гравитационный потенциал: достаточно вычислить скалярное произведение лапласиана вспомогательной функции и собственной функции оператора Лапласа. Число гармоник в дискретном случае (в отличие от непрерывного!) конечно и определяется шагом сетки (он у нас был 4 км по каждому из трёх направлений). Значения гравитационного потенциала в первом примере мы нашли с относительной точностью $\eta = 2,7 \cdot 10^{-4}$. При решении обратной задачи (т.е. поиске распределения масс по известному в многосвязной области полю) точность составила $\eta = 4,1 \cdot 10^{-3}$.

Во втором модельном примере участок съёмки имел размеры $600 \times 600 \text{ км}$ – этот участок выходит за пределы горизонтального сечения куба с ребром 200 км. Призм было также четыре, плотность породы в одной призме была равна $1,5 \text{ г/см}^3$, в трёх других – $1,0 \text{ г/см}^3$ (со знаком «+»). Поперечники призм были приблизительно

равны 200 км и 150 км (для левой нижней). На рис. 5 показано гравитационное поле, создаваемое распределением масс во втором модельном примере.

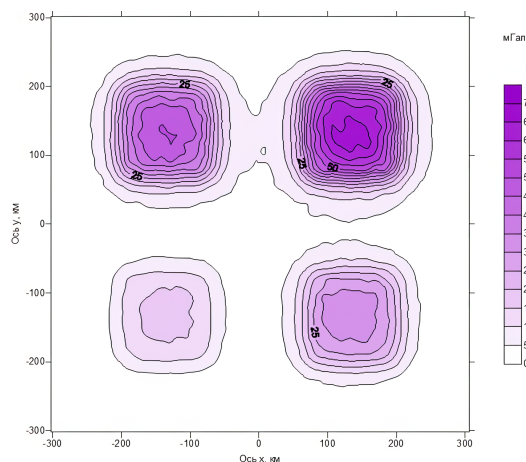


Рис. 5. Карта изолиний гравитационного поля в модельном примере № 2.

Многосвязные области строились так: в верхнем полупространстве, точнее говоря, в пересечении эталонного куба мы «вырезали» параллелепипеды, являющиеся отражением охватывающих 4 прямые призмы аналогов. Затем мы поставили задачу (22)–(23) для получившейся области. Поскольку при таком процессе моделирования часть информации об объектах терялась (от каждой из призм оставалась в горизонтальном сечении приблизительно треть по площади), то точность вычисления гравитационного потенциала также снижалась: поле было восстановлено с относительной точностью $\Delta = 1,1 \cdot 10^{-3}$. Под относительной точностью аппроксимации Δ мы понимаем следующее:

$$\Delta = \frac{\|Az - \mathbf{f}_\delta\|_E}{\|\mathbf{f}_\delta\|_E}, \quad \mathbf{z} \equiv \{m_S(\xi^{(S)})\}_{\xi^{(S)} \in J_S},$$

$$Az = V_S(x^{(s)}) = \sum_{\xi^{(S)} \in J_S} m_S(\xi^{(S)}) \Omega_n^{(S)}(x^{(s)} - \xi^{(S)}),$$

$\|\mathbf{f}_\delta\|_E$ – евклидова норма вектора. Az – результат аппроксимации поля, $\mathbf{f}_\delta$ – вектор значений дискретного гравитационного поля на нескольких горизонтальных плоскостях в верхнем полупространстве (плоскостей в каждом из примеров было три; они располагались на высоте 500 метров, 1 км и 2 км).

Обратная задача также, естественно, была решена с меньшей точностью – $\eta = 3,8 \cdot 10^{-2}$. При этом относительная точность определяется так:

$$\eta = \frac{\|m_S(\xi^{(S)}) - m_{calc}(\xi^{(S)})\|_{E(J_S)}}{\|m_S(\xi^{(S)})\|_{E(J_S)}}.$$

Подчеркнём то обстоятельство, что мы сами выбираем каноническую многосвязную область (в соответствии с априорной информацией об источниках поля). Нет необходимости рассматривать вырезы строго в областях, получающихся с помощью отражения относительно дневной поверхности предполагаемых источников. Достаточно вычислить все собственные функции дискретного аналога оператора Лапласа в канонической области и аккуратно (разделяя положительные и отрицательные слагаемые в сумме) посчитать скалярные произведения правой части (22) с этими собственными функциями. Если мы знаем значения функции на всех компонентах границы многосвязной области, то и вспомогательная функция для решения задачи (22) (или (23)) определяется надёжно. Проблема заключается в том, что на практике априорная информация о геометрии и местоположении источников либо вообще отсутствует, либо является весьма скудной.

Описанная в статье новая методика решения обратных задач гравиметрии была апробирована также на практическом примере. Мы взяли набор из 7000 точек измерений гравитационного поля в районе Чукотки (см. рис. 6). Ранее [Степанова и Колотов, 2025; *Stepanova et al.*, 2025] мы тестировали комбинированную методику интерпретации данных гравиразведки на полигоне в указанном регионе (пунктов наблюдений было почти 9000). Как отмечалось в работе [Stepanova et al., 2025], показатель качества решения $\Delta = \frac{\|Az - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E}$ составил 10^{-8} в региональном варианте и 10^{-10} – в локальном. С помощью изложенного в настоящей статье подхода были построены эквивалентные по внешнему полю сеточные массы, на этот раз объёмные. Сначала по данным исходного набора строились эквивалентные по внешнему полю локальные модифицированные S -аппроксимации, затем вычислялись значения гравитационного поля на нескольких горизонтальных плоскостях выше дневной поверхности (таких плоскостей было 5, расстояния этих плоскостей от поверхности Земли варьировались от 500 до 2500 метров с шагом в 500 метров). По расширенному набору точек (число элементов в нем составило 35 000) определялись сеточные массы (решалась обратная задача для уравнения (7)). Затем вычислялись значения дискретного гравитационного поля в точках, лежащих ниже дневной поверхности, на десяти горизонтальных плоскостях, глубины залегания которых менялись в диапазоне от 500 до 5000 метров, с шагом в 500 метров: найденные сеточные массы умножались на значения дискретного фундаментального решения аналога оператора Лапласа по формуле (7). Мы уже упоминали, что сеточное фундаментальное решение было рассчитано на шаблоне, который можно масштабировать в каждом конкретном случае. Шаг сетки по координатам x , y был у нас вдвое больше, чем шаг по оси z : 2 км и 1 км, соответственно.

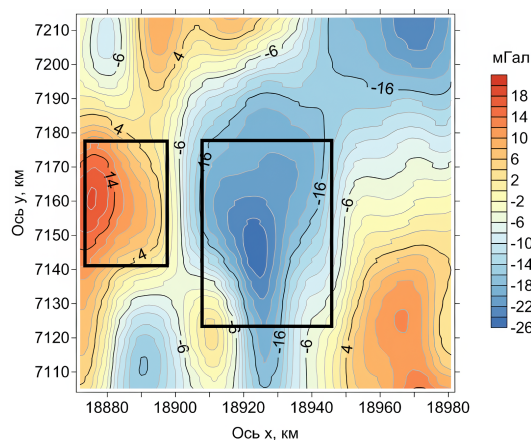


Рис. 6. Карта изолиний гравитационного поля в районе Чукотки. Чёрными линиями нанесены контуры лакун.

Далее, на карте изолиний гравитационного поля в рассматриваемом регионе намечались контуры лакун (см. рис. 6). В верхнем полупространстве лакуны имели вертикальный размер, равный 2,5 километрам, в нижнем полупространстве лакуны располагались симметрично относительно дневной поверхности, но вертикальный размер их был равен 4,5 км. После этого решалась задача (22)–(23), как было описано выше.

Показатель качества решения обратной задачи по поиску сеточных масс η составил $5,1 \cdot 10^{-2}$.

Распределения сеточных масс в объемлющем кубе показаны на рис. 7а, 7б, 7с. Показатель качества решения прямой задачи получился равным 10^{-6} . Здесь необходимо подчеркнуть, что определялись фактически объёмные распределения сеточных масс (сеточные массы у нас располагались не на нескольких горизонтальных плоскостях, расстояние между которыми было равно шагу сетки по координате z , т.е. 1 км). Это более трудоёмкий (по части затрат компьютерного времени) процесс, по сравнению с вычислениями в рамках новой комбинированной методики с применением метода

S -аппроксимаций, когда речь идёт о двумерных (заданных на небольшом числе плоскостей или сфер) эквивалентных источниках.

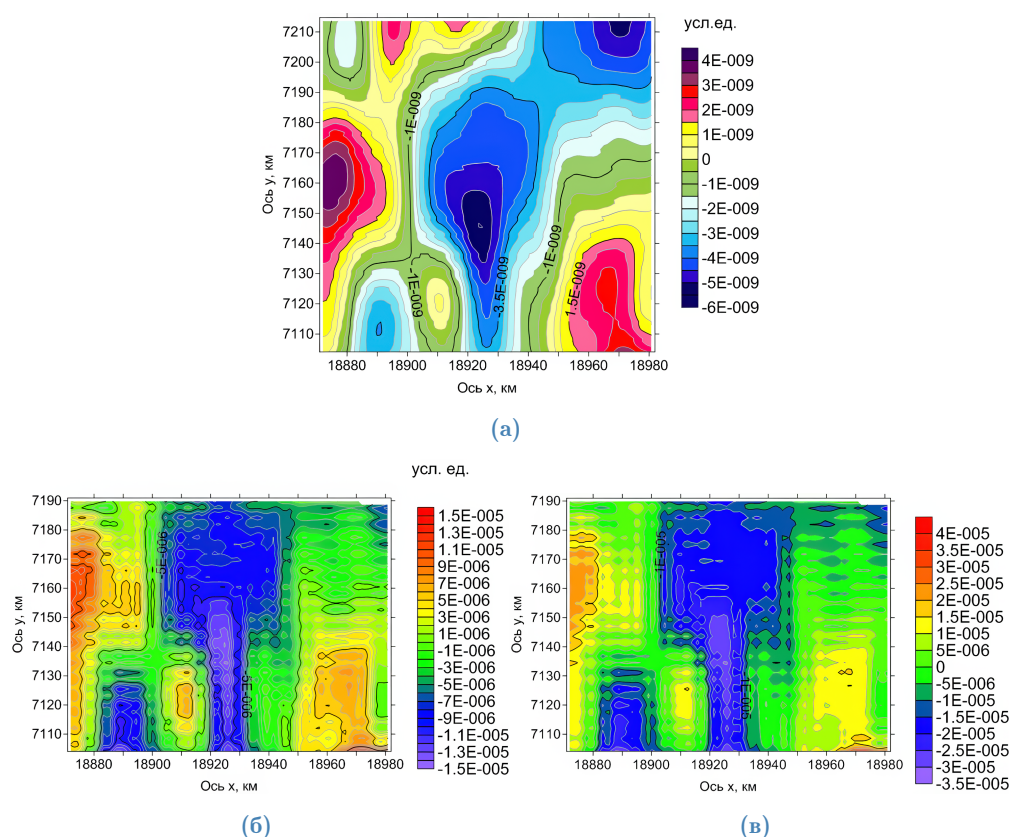


Рис. 7. Сечения сеточного распределения масс горизонтальной плоскостью: (а) $z = -0,5$ км; (б) $z = -2$ км; и (с) $z = -5$ км. Практический пример. Район Чукотки.

5. Заключение

1. В статье предложена новая методика решения прямых и обратных задач теории дискретного гравитационного потенциала, предполагающая задание канонических многосвязных областей и нахождение собственных функций дискретного аналога оператора Лапласа в них.
2. Новый алгоритм решения линейной обратной задачи по определению плотности источника для областей с лагунами может применяться как самостоятельно, так и одновременно с уже существующими методами – для контроля точности аппроксимации функций, описывающих распределение сеточных масс.
3. При отсутствии априорной информации об источниках гравитационного поля или её недостаточности можно предложить следующий алгоритм решения обратных задач:
 - (а) задаётся область внутри эталонного куба с заходом в нижнее полупространство, число лакун при этом полагается равным 2 (на начальном этапе местоположение лакун не фиксируется и может определяться случайным образом, в дальнейшем предполагается уточнение их локализации);
 - (б) определяются собственные функции дискретного аналога оператора Лапласа и решается обратная задача по формулам (23);
 - (с) по формуле (7) находятся значения дискретного потенциала в контрольных точках сети наблюдений (например, на нескольких горизонтальных плоскостях в верхнем полупространстве);
 - (д) число лакун удваивается, и снова решается обратная задача (23);

- (е) вычисляется невязка между заданными значениями потенциала в контрольных точках и значениями, найденными по формуле (7).
- (f) Далее процедура повторяется, пока не будет достигнута необходимая точность аппроксимации дискретного гравитационного потенциала в контрольных узлах сетки.

Подчеркнём ещё раз, что найденные в результате решения обратной задачи дискретного потенциала распределения сеточных масс могут быть использованы для вычисления линейных трансформант гравитационного поля (как высших производных континуального потенциала, так и сеточных производных дискретного гравитационного потенциала). Линейные трансформанты поля могут, в свою очередь, применяться не только в области гравиразведки, но и в смежных областях: при решении геоморфологических, геодезических и т.п. задач, а также при выполнении сейсмического районирования, для выявления линий разлома земной коры.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность А. Н. Левашову за полезные замечания и предоставление материалов для тестовых расчётов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, утверждённого Минобрнауки России.

Список литературы

- Баранов Ю. В. Анализ геофизических полей для выделения зон возможных очагов землетрясений восточной окраины Восточно-Европейской платформы // Вестник Пермского университета. Геология. — 2016. — Т. 4, № 33. — С. 36–40. — <https://doi.org/10.17072/psu.geol.33.36>
- Блинова Т. С. Формирование единой базы данных геодинамически неустойчивых зон слабосейсмичных регионов // Геофизические исследования. — 2021. — Т. 22, № 2. — С. 5–30. — <https://doi.org/10.21455/gr2021.2-1>
- Самарский А. А. и Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — 1978.
- Степанова И. Э. и Колотов И. И. Вариационно-комбинаторный подход при решении обратных задач геофизики в рамках теории дискретного потенциала. Случай геологических сред со сложной структурой // Russian Journal of Earth Sciences. — 2025. — № 3. — ES3002. — <https://doi.org/10.2205/2025es001000>
- Страхов В. Н. Об эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности масс // Доклады АН СССР. — 1977. — Т. 236, № 2. — С. 329–331.
- Страхов В. Н., Степанова И. Э. и Гричук Л. В. Теория дискретного гравитационного потенциала и ее использование в гравиметрии // «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей», Труды международной конференции. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 1996. — С. 49–71.
- Arsanukaev Z. Z. Calculation of spatial elements of anomalous fields based on the theory of discrete gravitational fields // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. — 2004. — Vol. 40, no. 11. — P. 935–955.
- Cain J. C., Wang Z., Kluth C., et al. Derivation of A Geomagnetic Model to $N = 63$ // Geophysical Journal International. — 1989. — Vol. 97, no. 3. — P. 431–441. — <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1989.tb00513.x>
- Dyment J. and Arkani-Hamed J. Equivalent source magnetic dipoles revisited // Geophysical Research Letters. — 1998. — Vol. 25, no. 11. — P. 2003–2006. — <https://doi.org/10.1029/98gl51331>
- Emilia D. A. Equivalent Sources Used As An Analytic Base For Processing Total Magnetic Field Profiles // Geophysics. — 1973. — Vol. 38, no. 2. — P. 339–348. — <https://doi.org/10.1190/1.1440344>
- Frik P. G., Sokoloff D. D. and Stepanov R. A. Wavelets for the space-time structure analysis of physical fields // Physics-Uspekhi. — 2022. — Vol. 65, no. 1. — P. 62–89. — <https://doi.org/10.3367/ufne.2020.10.038859>
- Hood L. L., Oliveira J. S., Galluzzi V. D., et al. Investigating Sources of Mercury's Crustal Magnetic Field: Further Mapping of MESSENGER Magnetometer Data // Journal of Geophysical Research: Planets. — 2018. — Vol. 123, no. 10. — P. 2647–2666. — <https://doi.org/10.1029/2018je005683>
- Langlais B., Purucker M. E. and Manda M. Crustal magnetic field of Mars // Journal of Geophysical Research: Planets. — 2004. — Vol. 109, E2. — E02008. — <https://doi.org/10.1029/2003je002048>
- Martyshko P. S., Ladovskii I. V., Byzov D. D., et al. Gravity Data Inversion with Method of Local Corrections for Finite Elements Models // Geosciences. — 2018a. — Vol. 8, no. 10. — P. 373. — <https://doi.org/10.3390/geosciences8100373>

- Martyshko P. S., Ladovskij I. V., Byzov D. D., et al. On Solving the Forward Problem of Gravimetry in Curvilinear and Cartesian Coordinates: Krasovskii's Ellipsoid and Plane Modeling // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2018b. — Vol. 54, no. 4. — P. 565–573. — <https://doi.org/10.1134/s1069351318040079>
- Mikhailov V. O., Timoshkina E. P., Kiseleva E. A., et al. Problems of the Joint Inversion of Temporal Gravity Variations with the Data on Land and Seafloor Displacements: a Case Study of the Tohoku-Oki Earthquake of March 11, 2011 // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2019. — Vol. 55, no. 5. — P. 746–752. — <https://doi.org/10.1134/s1069351319050070>
- Stepanova I. E. and Kolotov I. I. The Combinatorial-Variational Approach to Solving Linear and Nonlinear Inverse Problems in Geophysics // *Doklady Earth Sciences*. — 2024. — Vol. 518, no. 1. — P. 1534–1545. — <https://doi.org/10.1134/s1028334x24602499>
- Stepanova I. E., Kolotov I. I., Levashov A. N., et al. On Finding Stable Approximate Solutions of Linear Inverse Problems of Gravimetry in the Discrete Potential Theory: A Local Version // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2025. — Vol. 61, no. 1. — P. 126–141. — <https://doi.org/10.1134/s1069351325700089>
- Stepanova I. E. and Strakhov V. N. Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2002. — Vol. 38, no. 7. — P. 535–544.
- Thébault E., Schott J. J. and Mandeau M. Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 2006. — Vol. 111, B1. — B01102. — <https://doi.org/10.1029/2005jb003836>
- Uno H., Johnson C. L., Anderson B. J., et al. Modeling Mercury's internal magnetic field with smooth inversions // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2009. — Vol. 285, no. 3/4. — P. 328–339. — <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.02.032>

ON A NEW APPROACH TO SOLVING GRAVIMETRY PROBLEMS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE DISCRETE POTENTIAL THEORY

I. E. Stepanova^{1,*} , I. I. Kolotov² , and A. V. Shchepetilov² 

¹Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russian Federation

****Correspondence to:** Inna Stepanova, tet@ifz.ru

Abstract: The paper deals with the possibility of finding solutions to direct and inverse gravimetry problems by means of the apparatus of eigenfunctions of the Laplace operator. Data acquired through remote sensing of the Earth's physical fields are of a discrete character (often in the form of bit chains). The discrete gravitational potential theory allows restoring, with a relatively high degree of reliability, grid mass distributions that are equivalent with respect to an external field complicated by random noise, as well as solving various direct and inverse gravimetry problems. Construction of eigenfunctions of a discrete analogue of the Laplace operator in three-dimensional domains with complex structure eliminates the need for multiple solutions of ill-conditioned systems of linear algebraic equations (SLAE).

Keywords: discrete potential, complex geological structure, eigenfunctions of the Laplace operator

RESEARCH ARTICLE

Received: September 2, 2025

Accepted: November 10, 2025

Published: August 11, 2026



© 2026. The Authors.

Funding. This work was conducted in the framework of budgetary funding of the Schmidt Institute of Physics of the Earth of RAS, adopted by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Citation: Stepanova I. E., Kolotov I. I., and Shchepetilov A. V. (2026), On a New Approach to Solving Gravimetry Problems within the Framework of the Discrete Potential Theory, *Russian Journal of Earth Sciences*, 26, ES3009, <https://doi.org/10.2205/2026ES001083>, EDN: ZQVNLH

References

- Arsanukaev Z. Z. Calculation of spatial elements of anomalous fields based on the theory of discrete gravitational fields // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2004. — Vol. 40, no. 11. — P. 935–955.
- Baranov Yu. V. Analysis of Geophysical Data to Highlight Areas of Possible Earthquakes in the Eastern Margin of the East European Platform // *Bulletin of Perm University. Geology*. — 2016. — Vol. 4, no. 33. — P. 36–40. — <https://doi.org/10.17072/psu.geol.33.36> — (In Russian).
- Blinova T. S. Formation of unified database for forecasting geodynamically unstable zones of low seismic regions // *Geophysical Research*. — 2021. — Vol. 22, no. 2. — P. 5–30. — <https://doi.org/10.21455/gr2021.2-1> — (In Russian).
- Cain J. C., Wang Z., Kluth C., et al. Derivation of A Geomagnetic Model to N = 63 // *Geophysical Journal International*. — 1989. — Vol. 97, no. 3. — P. 431–441. — <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1989.tb00513.x>
- Dyment J. and Arkani-Hamed J. Equivalent source magnetic dipoles revisited // *Geophysical Research Letters*. — 1998. — Vol. 25, no. 11. — P. 2003–2006. — <https://doi.org/10.1029/98gl51331>
- Emilia D. A. Equivalent Sources Used As An Analytic Base For Processing Total Magnetic Field Profiles // *Geophysics*. — 1973. — Vol. 38, no. 2. — P. 339–348. — <https://doi.org/10.1190/1.1440344>
- Frik P. G., Sokoloff D. D. and Stepanov R. A. Wavelets for the space-time structure analysis of physical fields // *Physics-Uspeski*. — 2022. — Vol. 65, no. 1. — P. 62–89. — <https://doi.org/10.3367/ufne.2020.10.038859>

- Hood L. L., Oliveira J. S., Galluzzi V. D., et al. Investigating Sources of Mercury's Crustal Magnetic Field: Further Mapping of MESSENGER Magnetometer Data // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2018. — Vol. 123, no. 10. — P. 2647–2666. — <https://doi.org/10.1029/2018je005683>
- Langlais B., Purucker M. E. and Manda M. Crustal magnetic field of Mars // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2004. — Vol. 109, E2. — E02008. — <https://doi.org/10.1029/2003je002048>
- Martyshko P. S., Ladovskii I. V., Byzov D. D., et al. Gravity Data Inversion with Method of Local Corrections for Finite Elements Models // *Geosciences*. — 2018a. — Vol. 8, no. 10. — P. 373. — <https://doi.org/10.3390/geosciences8100373>
- Martyshko P. S., Ladovskij I. V., Byzov D. D., et al. On Solving the Forward Problem of Gravimetry in Curvilinear and Cartesian Coordinates: Krasovskii's Ellipsoid and Plane Modeling // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2018b. — Vol. 54, no. 4. — P. 565–573. — <https://doi.org/10.1134/s1069351318040079>
- Mikhailov V. O., Timoshkina E. P., Kiseleva E. A., et al. Problems of the Joint Inversion of Temporal Gravity Variations with the Data on Land and Seafloor Displacements: a Case Study of the Tohoku-Oki Earthquake of March 11, 2011 // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2019. — Vol. 55, no. 5. — P. 746–752. — <https://doi.org/10.1134/s1069351319050070>
- Samarskii A. A. and Nikolaev E. S. Methods for solving grid equations. — M. : Nauka, 1978. — 592 p. — (In Russian).
- Stepanova I. E. and Kolotov I. I. The Combinatorial-Variational Approach to Solving Linear and Nonlinear Inverse Problems in Geophysics // *Doklady Earth Sciences*. — 2024. — Vol. 518, no. 1. — P. 1534–1545. — <https://doi.org/10.1134/s1028334x24602499>
- Stepanova I. E. and Kolotov I. I. Combinatoric-Variational Approach to Solving Inverse Problems in Geophysics Within the Framework of the Discrete Potential Theory. Complex Geological Environment // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2025. — No. 3. — ES3002. — <https://doi.org/10.2205/2025es001000> — (In Russian).
- Stepanova I. E., Kolotov I. I., Levashov A. N., et al. On Finding Stable Approximate Solutions of Linear Inverse Problems of Gravimetry in the Discrete Potential Theory: A Local Version // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2025. — Vol. 61, no. 1. — P. 126–141. — <https://doi.org/10.1134/s1069351325700089>
- Stepanova I. E. and Strakhov V. N. Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2002. — Vol. 38, no. 7. — P. 535–544.
- Strakhov V. N. On the equivalence in the inverse problem of gravimetry at variable mass density // *Doklady AN SSSR*. — 1977. — Vol. 236, no. 2. — P. 329–331. — (In Russian).
- Strakhov V. N., Stepanova I. E. and Grichuk L. V. Theory of discrete gravitational potential and its use in gravimetry // "Issues of theory and practice of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields", Proceedings of the international conference. — Voronezh : Voronezh State University, 1996. — P. 49–71. — (In Russian).
- Thébault E., Schott J. J. and Manda M. Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 2006. — Vol. 111, B1. — B01102. — <https://doi.org/10.1029/2005jb003836>
- Uno H., Johnson C. L., Anderson B. J., et al. Modeling Mercury's internal magnetic field with smooth inversions // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2009. — Vol. 285, no. 3/4. — P. 328–339. — <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.02.032>