

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
РАЗВИВАЮЩЕГОСЯ ВОЛНЕНИЯК. В. Фокина^{*,1,2} и Д. В. Чаликов^{1,3}¹Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия²Российский государственный гидрометеорологический университет, Санкт-Петербург, Россия³Университет Мельбурна, Викториа, Австралия* **Контакт:** Карина Владимировна Фокина, fokinakarina@yandex.ru

Проведены долгопериодные расчёты эволюции трёхмерных волн, начиная от ранней стадии и заканчивая стабилизацией энергии, на основе фазо-разрешающей двухмерной модели. Анализируется эволюция основных интегральных характеристик и спектральных характеристик, а также распределение вероятности для поля возвышения и вертикальной скорости. На примере первых четырёх статистических моментов для нормированных полей возвышения и поверхностной вертикальной скорости показано, что волновое поле, по-видимому, обладает свойством автомодельности, т. е. независимостью статистической структуры поля от степени развития волн. Этот вывод подтверждён расчётами с трёхмерной моделью.

Ключевые слова: фазо-разрешающее моделирование, волновой спектр, ветровые волны, приток энергии, диссипация волновой энергии, статистические характеристики волн.

Цитирование: Фокина, К. В., и Д. В. Чаликов Численное исследование статистических характеристик развивающегося волнения // Russian Journal of Earth Sciences. — 2024. — Т. 24. — ES2010. — DOI: 10.2205/2024es000878 — EDN: SNFMCI

Введение

Морские волны относятся к явлениям, которые в наибольшей степени влияют на человеческую деятельность в море и являются причиной наибольшего количества жертв и катастроф. Особенное значение изучение волн приобрело в связи с развитием морской добывающей промышленности. В настоящее время волны рассматриваются как возобновляемый источник энергии.

Наиболее важным практическим достижением в этой области геофизической гидродинамики является создание прогностических моделей ветрового волнения. В таких моделях, основанных на спектральном представлении волнового поля, обобщены основные экспериментальные и теоретические достижения, полученные за прошедшие двести лет существования теории поверхностных волн. Спектральные модели типа WAVEWATCH [Tolman, 2009] являются основным инструментом исследования и прогноза волн благодаря своей экономичности и способности воспроизводить волнение на неограниченно больших территориях. Вместе с тем, спектральный подход, предполагающий, что волнение состоит из набора линейных мод с различными амплитудами и случайными фазами, упрощает представление волн вплоть до того, что не позволяет воспроизводить статистические характеристики волн, обусловленные нелинейностью. Поэтому, параллельно с созданием и развитием инженерных прогностических моделей, активно велись работы по прямому (фазо-разрешающему) моделированию волн.

В последние два десятилетия появились численные трёхмерные модели, основанные на полных уравнениях потенциального движения со свободной поверхностью. Такие модели основаны на различных численных методах, среди которых метод конечных разностей [Engsig-Karup и др., 2009; 2011], метод конечных объёмов [Causon и др., 2010], метод конечных элементов [Greaves, 2010; Ma и Yan, 2010], метод граничного элемента

<https://elibrary.ru/snfmci>

Получено: 5 сентября 2023 г.

Принято: 10 ноября 2023 г.

Опубликовано: 14 июня 2024 г.



© 2024. Коллектив авторов.

[Fructus *u др.*, 2005], метод крупных вихрей (LES) [Issa *u др.*, 2010; Lubin *u Caltagirone*, 2010], полунявный метод движущихся частиц [Kim *u др.*, 2014], метод фундаментальных решений [Young *u др.*, 2010], HOS метод [Ducrozet *u др.*, 2007; 2016; Kim *u др.*, 2023]. Большая часть таких моделей была разработана для различных инженерных приложений, и лишь несколько подходов были направлены на исследовательские цели. Модели такого рода универсальны, но обладают существенным недостатком: сложная схема, используемая для решения трёхмерного уравнения Пуассона, нужна только для того, чтобы вычислить вертикальную скорость на поверхности (т. е. первую производную по вертикали от потенциала). Ввиду того, что проблема диктует использование маленьких шагов по времени, модель оказывается применимой только для небольших площадей, содержащих лишь несколько тысяч волн, поэтому, спектральные и фазо-разрешающие модели имеют принципиально различные области применения.

Недавно найден подход к моделированию, основанный целиком на поверхностных характеристиках и аналогичный формулировке этой же проблемы для двухмерного волнового движения в конформных координатах [Chalikov, 2021a]. Таким образом, трёхмерная проблема обращается в двухмерную, что приводит к кардинальному упрощению проблемы и ускорению решения на два порядка.

Такая схема основывается на уравнении для потенциала на поверхности. Это уравнение точно, как для полного потенциала, так и для нелинейной компоненты, но конструктивным оказывается уравнение для нелинейной поправки. Трудность состоит в том, что уравнение помимо вертикальной скорости содержит её вертикальную производную. Однако в текущем году была найдена схема замыкания уравнений. Идея замыкания возникла при детальном рассмотрении вертикальной структуры потенциала скорости вблизи поверхности раздела. Поскольку структура потенциала первично описывается уравнением Лапласа, решение должно быть достаточно простым, несмотря на то, что граничные условия ставятся на криволинейной поверхности. В качестве гипотезы предполагалось, что первая и вторая производные потенциала на поверхности связаны между собой функциональной зависимостью.

Для определения функции в работе [Chalikov, 2021a, см. раздел 2] использовалась точная трёхмерная модель. Анализ десятков тысяч вертикальных профилей нелинейной компоненты потенциала скорости, рассчитанных по модели с высоким вертикальным разрешением, показал, что вертикальная скорость и её производная по вертикали связаны между собой линейной зависимостью с относительно малой ошибкой. Полученная зависимость использовалась при моделировании эволюции волнового поля и параллельных расчётов с теми же параметрами по полной модели. Нелинейная компонента вертикальной скорости является малой поправкой к полной вертикальной скорости, входящей в уравнения, что обеспечило хорошее совпадение расчётов. Упрощённая система уравнений включает эволюционные уравнения для поверхностного потенциала и возвышения и дополнительного кинематического условия, полученного проекцией уравнения Пуассона для нелинейной компоненты потенциала на поверхность.

Таким образом, трёхмерная задача эволюции потенциальных волн сводится к двухмерной задаче, которая решается с огромной экономией вычислительных ресурсов. Известно, что счёт по полной модели происходит очень долго, так что работа над усовершенствованием модели (главным образом, в её физической части) сводится к непрерывному ожиданию результатов, что лишает возможности многократного повторения результатов и подбора параметров. Уточнённые с помощью упрощённой модели схемы параметризации можно включить в точную модель. Упрощённая модель может оказаться незаменимой при моделировании совместной динамики двухмерных волн и волнового пограничного слоя (ВПС), основанного на LES технике. В настоящей статье приводятся новые статистические результаты, подтверждающие эффективность упрощённого подхода.

Формулировка моделей

В наших работах используются две модели трёхмерных волн. Первая из них (Full Wave model, FWM, [Chalikov, 2016]) основана на полных уравнениях потенциальной динамики жидкости со свободной поверхностью, вторая (Accelerated Wave Model, AWM, [Chalikov, 2021a]) использует упрощённую формулировку, позволяющую многократно увеличить скорость вычислений. Обе модели записаны в нестационарной, следующей поверхности системе координат

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t, \tag{1}$$

где функция $\eta(x, y, t) = \eta(\xi, \vartheta, \tau)$ описывает форму поверхности

$$\eta(\xi, \vartheta) = \sum_{-M \leq k, l \leq M} \eta_{k,l} \Theta_{k,l}$$

($\Theta_{k,l}$ – базовые функции разложения Фурье).

Интегрирование по времени проводится для кинематического и динамического поверхностных соотношений, которые в системе координат (1) принимают вид

$$\eta = -\eta_\xi \varphi_\xi - \eta_\vartheta \varphi_\vartheta + (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta, \tag{2}$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2} (\varphi_\xi^2 + \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta^2) - \eta - p_0, \tag{3}$$

где Φ – трёхмерный потенциал скорости, p_0 – внешнее давление, φ – значение потенциала скорости Φ на поверхности $\zeta = 0$. Уравнения модели инвариантны к преобразованию масштаба длины, поэтому они записаны в безразмерной форме с использованием следующих масштабов: длины L , времени $L^{1/2} g^{1/2}$, потенциала скорости $L^{3/2} g^{1/2}$ (g – ускорение свободного падения). Давление p_0 отнесено к единице плотности воды, его масштаб равен Lg .

Уравнения (3) и (4) выглядят как двухмерные, однако они содержат вертикальную производную от потенциала Φ_ζ у поверхности $\zeta = 0$, для расчёта которой в FWM решается трёхмерное эллиптическое уравнение для потенциала скорости:

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\vartheta\vartheta} + \Phi_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\Phi), \tag{4}$$

где Υ – оператор:

$$\Upsilon(\Phi) = 2\eta_\xi \Phi_{\xi\zeta} + 2\eta_\vartheta \Phi_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta}) \Phi_\zeta - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_{\zeta\zeta}.$$

Численное решение системы уравнений (2)–(4) существенно упрощено предположением, что потенциал скорости может быть точно представлен суммой аналитических компонентов $\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta)$, ($\bar{\varphi} = \bar{\Phi}(\xi, \vartheta, 0)$) и нелинейного возмущения $\tilde{\varphi}(\xi, \vartheta, \zeta)$, ($\tilde{\varphi} = \tilde{\Phi}(\xi, \vartheta, 0)$). Вычислительные преимущества достигаются тем, что все производные аналитической компоненты вычисляются точно, а нелинейная поправка оказывается на два порядка меньше. Аналитическая компонента $\bar{\Phi}$ описывается уравнением Лапласа:

$$\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta} = 0$$

с известным решением:

$$\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) = \sum_{k,l} \bar{\varphi}_{k,l}(\tau) \exp(|k|\zeta) \Theta_{k,l} \tag{5}$$

при этом уравнение (4) принимает вид

$$\tilde{\Phi}_{\xi\xi} + \tilde{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\tilde{\Phi}) + \Upsilon(\bar{\Phi}) \tag{6}$$

и решается при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \zeta = 0 & \quad \tilde{\Phi} = 0 \\ \zeta \rightarrow -\infty & \quad \tilde{\Phi}_\zeta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Уравнение (6) для нелинейной компоненты потенциала скорости $\tilde{\Phi}$ решается в пространстве Фурье с помощью трёхдиагонального матричного алгоритма [Thomas, 1949]. Алгоритм обобщён на трёхмерный случай на основе Фурье-представления по продольным координатам ξ и ϑ . Уравнение решается итерациями с последовательной коррекцией правой части. Точность решения контролируется максимальной невязкой $\epsilon \sim (10^{-4} - 10^{-6})\|\eta\|$ ($\|\eta\|$ – норма для возмущения поверхности). Детали численной схемы и результаты всесторонней проверки модели можно найти в [Chalikov, 2021a,b].

Модель FWM в рамках условий потенциальности и периодичности не имеет ограничений, за исключением ограничений, связанных с устойчивостью. Наиболее очевидно применение этой модели для исследования статистических свойств многомодового волнового поля на больших площадях. Недостатком модели является её низкая вычислительная эффективность, вызванная необходимостью итеративного решения трёхмерного уравнения для потенциала (6) на каждом шаге по времени.

Известно, что трёхмерная структура волнового поля в модели FWM рассчитывается по трёхмерному уравнению для потенциала (6) только для того, чтобы рассчитать вертикальную скорость на поверхности $w = \varphi_\zeta$ ($\zeta = 0$). Таким образом, оказывается, что так же, как и в конформной формулировке, эволюция волн полностью определяется поверхностными характеристиками, включая поверхностную скорость, а трёхмерная структура потенциала скорости не используется. Возникает естественная мысль сформулировать задачу только в терминах поверхностных характеристик без воспроизведения трёхмерной структуры решения. Ключом к построению такой схемы оказался приём, основанный на разделении потенциала на линейную и нелинейную компоненты.

При $\zeta = 0$ уравнение для нелинейной компоненты потенциала принимает вид:

$$\tilde{w}_\zeta = 2(\eta_\xi w_\xi + 2\eta_\vartheta w_\vartheta) + \Delta\eta w - s w_\zeta. \tag{7}$$

Здесь использованы обозначения: $w = \varphi_\zeta$, $w_\zeta = \varphi_{\zeta\zeta}$, $s = \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2$. Уравнение (7) является точным. Принимая во внимание, что $w_\xi = 0$ и $w_\vartheta = 0$, уравнение (7) можно представить в форме

$$(1 + s)\tilde{w}_\vartheta = 2(\eta_\xi \tilde{w}_\xi + \eta_\vartheta \tilde{w}_\vartheta + \Delta\eta \tilde{w} + r), \tag{8}$$

где слагаемое r зависит только от линейной компоненты \tilde{w} ,

$$r = 2(\eta_\xi \tilde{w}_\xi + \eta_\vartheta \tilde{w}_\vartheta) + \Delta\eta \tilde{w} - s \tilde{w}_\zeta, \tag{9}$$

вычисляемой по соотношению (5). Точное двумерное уравнение (8) содержит две переменные – первую и вторую производные нелинейной компоненты потенциала по вертикали, т. е. \tilde{w} и \tilde{w}_ϑ . В отличие от трёхмерного уравнения (6), переменные \tilde{w} и \tilde{w}_ϑ определяются асимптотическим поведением потенциала скорости вблизи поверхности. В работе [Chalikov, 2021b], выполненной на основе точной трёхмерной модели с высоким вертикальным разрешением, показано, что вертикальные профили $\varphi(\zeta)$ имеют универсальный вид, и в достаточно широкой окрестности $\zeta = 0$ очень близки к линейным. Анализ профилей, рассчитанных по полной модели, показывает, что \tilde{w} и \tilde{w}_ϑ оказываются всегда одного знака, поэтому профиль потенциала удобно аппроксимировать следующей формулой:

$$\tilde{\varphi} = \tilde{w}\zeta \exp\left(\frac{\zeta}{2A}\right),$$

которая определяет зависимость между \tilde{w} и \tilde{w}_ζ :

$$\tilde{w} = A\tilde{w}_\zeta, \tag{10}$$

где A – коэффициент, зависящий от параметров модели и локальных характеристик.

Для обобщения линейной зависимости (10) необходимо выбрать по крайней мере два параметра с размерностью длины, учитывающей внутренние характеристики волнового поля.

Наилучшие результаты были получены в следующей форме:

$$A = \sigma F(\mu), \tag{11}$$

где параметр μ определён соотношением:

$$\mu = \sigma\sigma_L, \tag{12}$$

а функция A аппроксимируется формулой

$$F = \frac{d_0\mu + d_1}{\mu + d_2}, \tag{13}$$

где $d_0 = 0,535$, $d_1 = 0,0414$, $d_2 = 0,00321$.

Эффективность этого упрощения обусловлена тем, что нелинейная поправка к вертикальной скорости на поверхности оказывается очень мала по сравнению с линейной компонентой вертикальной скорости.

Для иллюстрации этого утверждения использовалась модель, описанная в работах [Chalikov, 2021a,b]. Использовалось разрешение 1024×512 мод, число уровней по вертикали равнялось 50. Для того чтобы результаты отражали ситуации с разными интегральными характеристиками, в модель были включены алгоритмы, описывающие приток энергии к волнам и диссипацию, т. е. волны моделировались в процессе их развития. Алгоритмы физических процессов подробно описаны в [Chalikov, 2016]. Расчёты производились с временным шагом $\Delta = 0,01$ на период $\tau = 2000$.

На рис. 1 приведены спектры линейной компоненты скорости и полной вертикальной скорости. Как видно, полная вертикальная скорость превосходит на 2–3 порядка нелинейную поправку, что подтверждает справедливость принятого подхода. Малость нелинейной поправки к вертикальной скорости не означает небольшую роль нелинейности в волновой динамике, поскольку в двухмерной модели используются полные нелинейные поверхностные условия (2) и (3).

Наиболее убедительное свидетельство точности ускоренной модели может быть получено сравнением полной компоненты w , рассчитанной по трёхмерному уравнению (6) и такой же величины $w_A = \tilde{w} + \tilde{w}$, рассчитанной по двухмерному уравнению (8). Результаты этих расчётов приведены на рис. 2. Жирная кривая показывает осреднённые для каждого интервала $\Delta w = 0,001$ значения w_A , рассчитанные с учётом (9). Связь между w и w_A определяется линейным уравнением

$$w_A = 9 \times 10^{-5} + 0,995w. \tag{14}$$

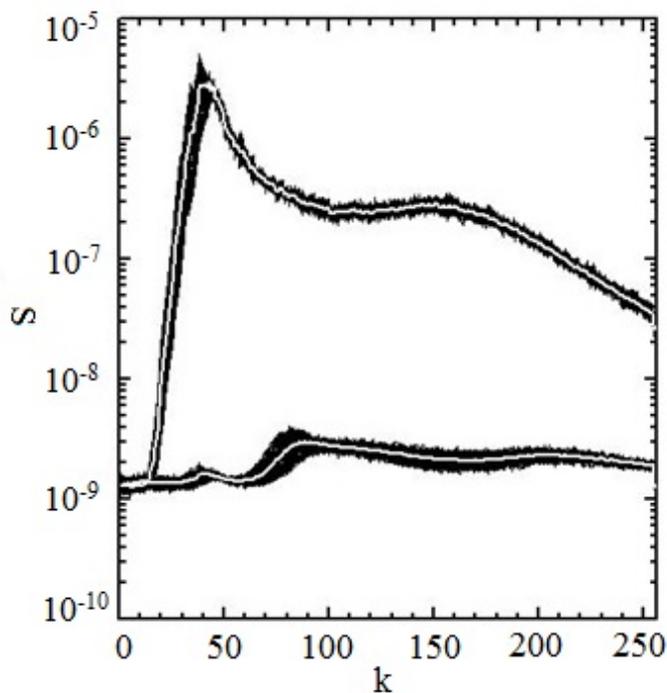


Рис. 1. Одномерные спектры полной вертикальной скорости на поверхности w (верхняя кривая) и нелинейной компоненты вертикальной скорости (нижняя кривая), как функции волнового числа рассчитанные в ходе интегрирования с FWM. Белые кривые получены трансформацией двумерного спектра из пространства волновых чисел в полярную систему координат (θ, k) и суммированием по углу θ . Чёрный фон для обеих групп создают 10 000 кривых, полученных трансформацией двумерного спектра из пространства волновых чисел в полярную систему координат (θ, k) и суммированием по углу θ и рассчитанные по достижении режима близкого к квазистационарному. Белые кривые – осреднённые по всем реализациям спектры.

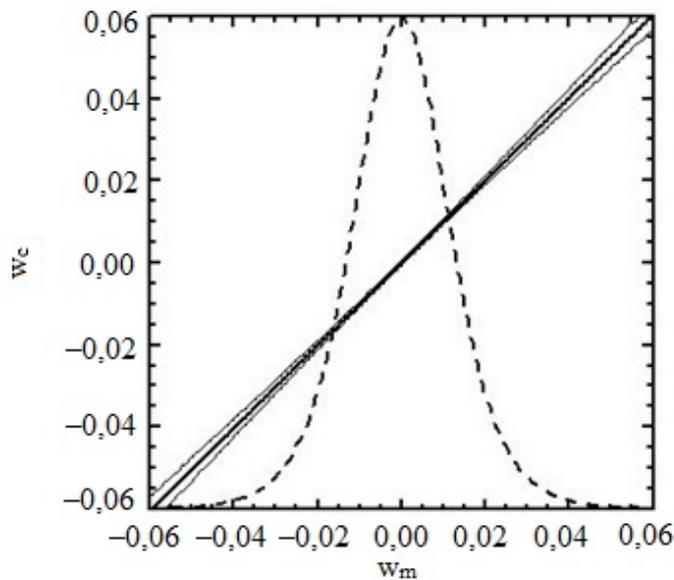


Рис. 2. Сравнение полной вертикальной скорости w_m , рассчитанной с помощью FWM, с той же скоростью w_c , рассчитанной с помощью уравнений (8) и (11)–(13). Жирная линия соответствует усреднённой зависимости, в то время как тонкие линии показывают дисперсию. Расчёт проводился путём усреднения по ячейкам размером 0,001. Пунктирная кривая показывает распределение вероятности для w , нормированной максимальным значением вероятности. Нулевые значения вероятности соответствуют значению $w = -0,06$.

моделях были использованы схемы параметризации физических эффектов, предложенные в монографии [Chalikov, 2016], с небольшими модификациями, описанными в [Chalikov, 2021b]. Приток энергии рассчитывается на основе теории Майлза [Miles, 1957]. Согласно этой теории, приток энергии в небольшом интервале в пространстве Фурье пропорционален плотности потенциальной энергии в этом интервале с коэффициентом, зависящим от отношения скорости ветра к средней фазовой скорости в спектральном интервале. Форма этого коэффициента (традиционно называемого *beta* функцией) известна с низкой точностью.

Нелинейный поток энергии, направленный к малым волновым числам, приводит к смещению спектра, в то время как противоположный поток формирует форму спектрального хвоста. В численной модели второй процесс может привести к накоплению энергии вблизи предельного волнового числа. Оба процесса становятся более интенсивными с увеличением притока энергии. За ростом амплитуд при высоких волновых числах следует рост локальной крутизны и численной неустойчивости.

Основным процессом диссипации является обрушение волны [Babanin, 2011]. Неустойчивость границы раздела, приводящая к обрушению, является важной и слабо разработанной проблемой механики жидкости.

В целом, проблема параметризации физических процессов далека от завершения. Все схемы содержат коэффициенты, значения которых известны с низкой точностью. Однако, настраивая эти коэффициенты, можно более или менее правдоподобно имитировать развитие волн под действием ветра. Контроль решения удобно осуществлять на основе расчёта интегральной энергии.

Окаймляющие линии описывают дисперсию аппроксимации. Зависимость (14) изображена тонкой линией, которая везде совпадает с жирной линией. Средняя дисперсия ошибки меньше, чем 6×10^{-4} , поэтому все кривые различить на графике невозможно. Распределение вероятности для w (пунктирная кривая) показывает, что величины полной компоненты вертикальной скорости приходится, в основном, на интервал $-0,05 < w < 0,05$.

Наиболее убедительным является сравнение двух независимых методов расчёта вертикальной скорости w , т. е. метода, основанного на решении точного уравнения (6) (помечено как w_m), и другого – основанного на поверхностном условии (8) и соотношениях (11)–(13) (помечено как w_c). Это сравнение приведено на рис. 2. Количество используемых пар w_m и w_c равно 2×10^9 . Среднеквадратичная разность между w_m и w_c равна 0,0017.

Неадиабатические эффекты и эволюция интегральных характеристик волнового поля

Полная адиабатическая модель может использоваться только для относительно коротких временных интервалов или слабой нелинейности. Реальные волны получают энергию от ветра, эволюционируют и диссипируют. Алгоритмы, описывающие приток энергии от ветра и диссипацию волн, были разработаны для моделей прогнозирования волн, но эти схемы применимы для относительно низких волновых чисел. В обеих

Энергия волновых движений $E = E_p + E_k$ (E_p – потенциальная энергия, E_k – кинетическая энергия) может быть рассчитана по формулам:

$$E_p = 0,5 \langle \overline{\eta^2} \rangle, \tag{15}$$

$$E_k = \left\langle \left((1 + \eta_\xi^2 + \eta_\eta^2) \varphi \varphi_\zeta - 2\varphi (\eta_\xi \varphi_\xi + \eta_\eta \varphi_\eta) - 0,5 \Delta \eta \varphi^2 \right) \right\rangle, \tag{16}$$

где угловые скобки обозначают осреднение по горизонтали. Уравнение эволюции интегральной энергии может быть представлено в виде:

$$\frac{dE}{dt} = N + I + B + T, \tag{17}$$

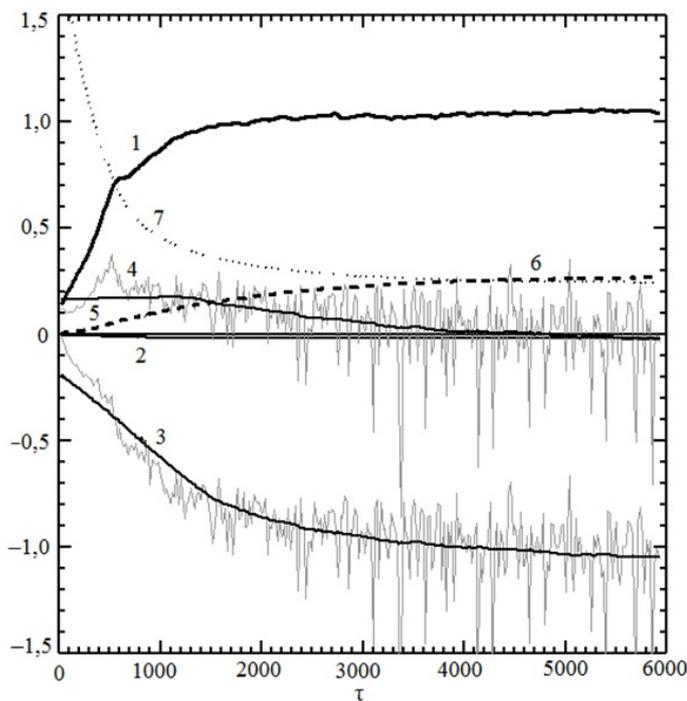


Рис. 3. Эволюция интегральных характеристик, полученных с помощью ускоренной двухмерной модели АWM, умноженных на 10^8 : 1) – приток энергии от ветра I ; 2) – диссипация хвостовой части спектра T ; 3) – диссипация за счёт обрушения B ; 4) – баланс энергии $I + B + T$; 5) – нелинейные взаимодействия N ; 6) – изменение полной энергии $10^6 E$; 7) – взвешенное спектром волновое число $10^{-2} k_w$ спектра. Мгновенные значения – серый цвет.

где I – интегральный приток энергии от ветра, B – скорость диссипации волновой энергии за счёт обрушения волн, T – скорость диссипации волновой энергии за счёт фильтрации высокочастотных мод. Волновой спектр может изменяться за счёт нелинейных взаимодействий N между волновыми модами, однако интегральный эффект этих взаимодействий должен быть равен нулю. Строго говоря, консервативность энергии может быть обеспечена только для потенциально адиабатического движения в бесконечной области. Нелинейность и ошибки аппроксимации могут вызывать флуктуации во времени полной энергии с амплитудой порядка $(10^{-6} - 10^{-5})E$. Интегральный эффект этих флуктуаций, как правило, диссипативный. С использованием уравнений (15) и (16) тренд полной энергии легко устраняется. Уравнения для скорости эволюции обеих видов энергии могут быть выведены из первичных уравнений (2)–(4), однако в численных расчётах возможна более простая схема: притоки энергии могут быть вычислены по отдельности, например, величина I вычисляется по формуле:

$$I = \frac{1}{\Delta t} (E^{t+\Delta t} - E^t), \tag{18}$$

где $E^{t+\Delta t}$ – интегральная энергия волнового поля, полученного за один шаг по времени с правой частью, содержащей только поверхностное давление p_0 . Для расчёта различных эффектов по процедуре (18) в уравнениях удерживаются члены, ответственные за этот эффект.

В настоящей работе модель АWM интегрировалась с разрешением 513×257 мод (2048×1024 узлов сетки). На рис. 3 показана эволюция интегральных характеристик волнения, заданного в начальных условиях спектром JONSWAP при $U/c_p = 1$ (U – скорость ветра, c_p – фазовая скорость в пике спектра) с максимумом на волновом числе $k_p = 120$ и угловым расширением в энергонесущей части спектра пропорциональным $(\cosh(\varphi))^{256}$, т. е. практически одномерные волны с очень маленькими поперечными возмущениями. Далее полагалось, что скорость ветра увеличилась до $5c_p$ и волны начали развиваться.

Этот процесс воспроизводился в течении интервала $\tau = 6000$ (600 тысяч шагов с шагом по времени $\Delta\tau = 0,01$), для чего потребовалось около 20 суток вычислений на компьютере DESKTOP-JGP2771 с тактовой частотой 3,2 ГГц. Таким образом,

численные эксперименты даже с ускоренной моделью AWM требуют значительных вычислительных ресурсов. Подобные расчёты с полной трёхмерной моделью FWM потребовали бы около полутора лет. Разумеется, при подготовке к длительному численному эксперименту проводилось много расчётов с моделью AWM при меньшем разрешении и на более короткие интервалы времени. Эти расчёты с моделью FWM были бы также невозможны. К сожалению, при существенном уменьшении разрешения, нужный результат часто не достигается из-за ухудшения аппроксимации. Использование многопроцессорных компьютеров для ускоренной модели нецелесообразно из-за быстрого роста доли времени, затрачиваемого на обмен между процессорами.

На протяжении всего расчётного периода полная энергия E (рис. 3, кривая 6) выросла более чем в 45 раз. При этом средневзвешенное волновое число k_w :

$$k_w = \frac{\sum_{k,l} k S(k,l)}{\sum_{k,l} S(k,l)}$$

уменьшалось от значения $k_w = 160$ до $k_w = 24$, а волновое число в пике спектра от $k_p = 115$ до $k_p = 15$. Эволюция $10^{-2}k_w$ показана на рис. 3, кривая 7. Скорость диссипации энергии в высокочастотной части спектра очень мала, но этот вид диссипации необходим, поскольку он обеспечивает вычислительную устойчивость. Интегральный эффект нелинейных взаимодействий практически равен нулю, несмотря на то, что какая-то часть энергии покидает расчётную область за счёт этих взаимодействий. Наибольшая диссипация осуществляется через процесс обрушения волн. Этот вид диссипации компенсирует большую часть притока энергии от ветра, при этом баланс энергии остаётся положительным, но уменьшается по мере приближения энергии к стационарному уровню.

Все кривые на рис. 3 для наглядности сглажены, но для диссипации обрушения и баланса энергии показаны значения, осреднённые по отрезку $\Delta t = 2$. Даже осреднённые по малому периоду колебания потери энергии за счёт обрушения могут достигать больших значений. Аналогичные колебания, фиксируемые на каждом шаге по времени, выглядят как некоррелированный во времени шум ещё большей амплитуды. Это соответствует представлениям о процессе обрушения, как о локально некоррелированном во времени спорадическом процессе [Babanin, 2011].

В настоящих расчётах использовалась схема, основанная на диффузионном операторе сглаживания с коэффициентом сглаживания, зависящим от локальной кривизны поверхности [Chalikov, 2016].

Спектры и статистические характеристики развивающегося волнения

Двухмерные спектры были получены осреднением мгновенных спектров за периоды $\Delta t = 20$. Одномерные спектры различных характеристик были получены трансформацией произвольного двухмерного спектра $S(k,l)$ в полярный спектр $S'(\theta,r)$ (θ – направление; $r = |k|$ – модуль волнового числа) и осреднением по углу θ (рис. 4). Поскольку объём полученной таким образом информации слишком велик для представления, одномерные спектры были усреднены по каждому из 6 периодов с примерно равными приращениями полной энергии.

В течение первого и второго периодов происходила наиболее быстрая трансформация волновых спектров (панель 1), связанная с ростом энергии и смещением спектра к низким волновым числам. Приток энергии (панель 2) при постоянном ветре и скорость диссипации за счёт обрушения (панель 3) полностью определяется формой волнового спектра. Спектры нелинейных взаимодействий (панель 4) представлены неотчётливо, но каждый из них обладает глубоким минимумом на высокочастотном склоне спектра и областью притока энергии на противоположном склоне. Этот поток энергии и определяет смещение спектра. Диссипация в «хвосте» спектра введена для обеспечения устойчивости счёта, но она соответствует физическому процессу поглощения нелинейного потока энергии, направленного в область высоких волновых чисел. Эта диссипация затухает вблизи предельного волнового числа просто потому, что там затухает энергия.

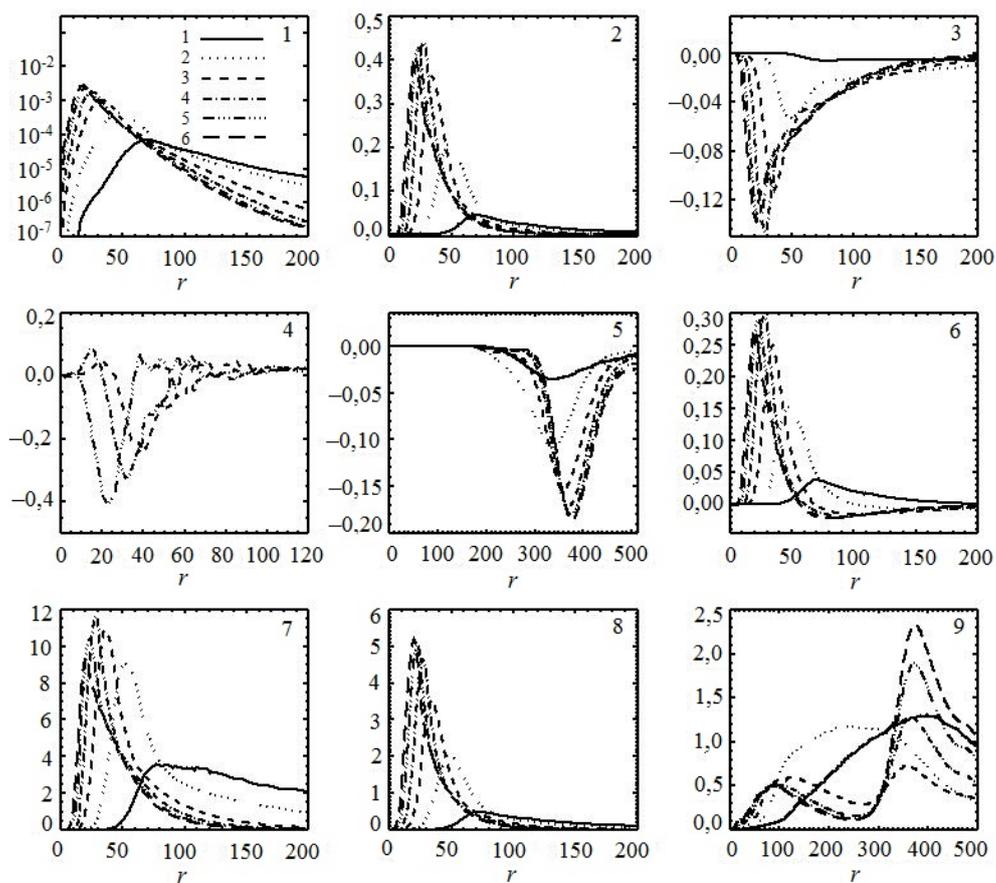


Рис. 4. Одномерные спектры: 1) – возвышения $10^9 S(r)$, 2) – притока энергии $10^9 S_i(r)$, 3) – диссипации за счёт обрушения волн $10^9 S_b(r)$, 4) – нелинейных взаимодействий $10^9 S_n(r)$, 5) – диссипации хвостовой части спектра $10^{11} S_t(r)$, 6) – баланса энергии $10^9 (S_b(r) + S_t(r) + S_i(r))$, 7) – горизонтальной производной возвышения поверхности $10^6 S_\xi(r)$, 8) – вертикальной скорости на поверхности $10^9 S_w(r)$, 9) – нелинейной компоненты вертикальной скорости на поверхности $10^9 S_n(r)$. Все спектры рассчитаны по шести различным интервалам времени, разные типы линий соответствуют разным временным отрезкам, каждый из которых оканчивается на время: 1. – $t = 500$; 2. – $t = 900$; 3. – $t = 1600$; 4. – $t = 2300$; 5. – $t = 3800$; 6. – $t = 6000$.

Баланс энергии (панель 6) отчётливо демонстрирует хорошо известный эффект «перекрытия» – энергия на средних волновых числах не растёт, а уменьшается с ростом разгона на фоне роста полной энергии. Панель 7 показывает, что волны наибольшей крутизны сосредоточены в области спектрального пика. На эту же область приходится максимум спектра полной вертикальной скорости на поверхности (панель 8). Наиболее интересны данные о нелинейной компоненте поверхностной вертикальной скорости \tilde{w} (панель 9). Как видно, её максимальные значения приходятся не на область максимальных значений полной вертикальной скорости, а на высокие волновые числа. При этом характерные значения \tilde{w} на 2–3 порядка меньше, чем w . Это различие объясняет успех применения ускоренной модели: интегрируются те же уравнения, что и в полной модели, а нелинейная компонента оказывается малой поправкой к полной вертикальной скорости. Подчеркнём, что в расчёте воспроизводились волны с крутизной, типичной для реальных волн.

Эволюция первых четырёх моментов поля возвышения показана на [рис. 5](#), где использованы обозначения: для средней величины Av , дисперсии Var , асимметрии Sk и эксцесса Ku определяемыми формулами:

$$Av = \bar{z}, Var = \overline{(z - \bar{z})^2}, Sk = \left(\frac{\overline{(z - \bar{z})^3}}{\sqrt{\overline{(z - \bar{z})^2}}^3} \right), Ku = \left(\frac{\overline{(z - \bar{z})^4}}{\sqrt{\overline{(z - \bar{z})^2}}^4} \right) - 3.$$

(черта обозначает осреднение по пространству).

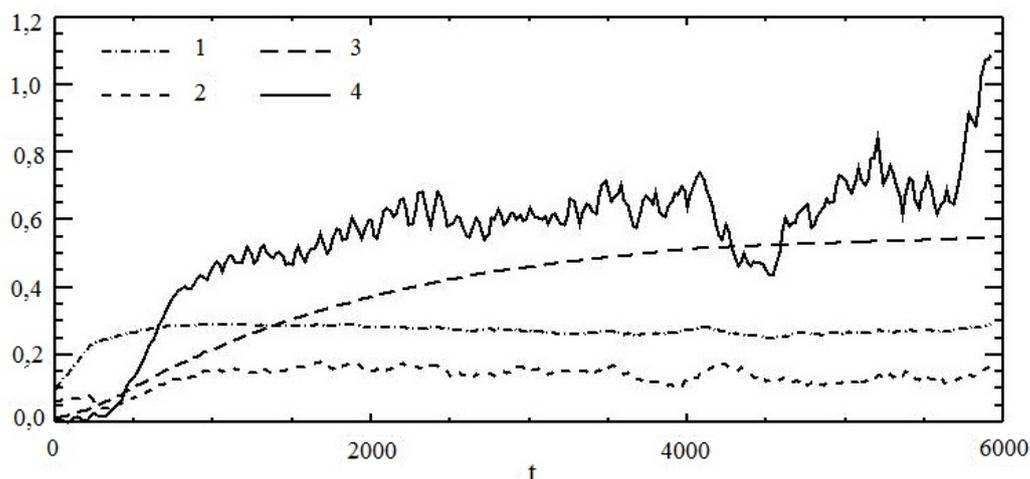


Рис. 5. Эволюция моментов, рассчитанных по полям уровня: 1) – асимметрии; 2) – эксцесса; 3) – дисперсии случайной величины, умноженной на 10^4 ; 4) – средней величины, умноженной на 10^4 .

Для линейных процессов асимметрия и эксцесс равны нулю. Дисперсия Var характеризует потенциальную энергию волн, которая почти точно равна половине полной энергии, поэтому эволюция Var подобна эволюции кривой 6, показанной на [рис. 3](#). Средняя величина Av мала и практически не меняется со временем. Величины асимметрии Sk и эксцесса Ku с течением всего периода вычислений сохраняют свои значения, характерные для умеренно нелинейного процесса. Более детальная информация представлена на [рис. 6](#), где показано распределение вероятностей для тех же четырех моментов поля возвышения, рассчитанных для шести последовательных периодов, использованных в [рис. 4](#).

Данные на [рис. 6](#) показывают, что после нормировки на H_s все моменты поля возвышения практически совпадают. Сплошная кривая на панели 1 относится к начальному периоду, в котором нелинейные свойства волнения сформировались не полностью. Остальные кривые различаются незначительно. Любопытно, что для второго и более высокого порядка нормированных моментов распределение вероятностей для разных стадий развития волнения оказывается универсальным: все шесть кривых совпадают с точностью до толщины линии на графике.

Распределение вероятностей для первых четырех моментов поля вертикальной скорости w , аналогичное приведённому на [рис. 6](#), показано на [рис. 7](#).

Вертикальная скорость w , как все переменные модели, безразмерна, т. е. нормирована на внешний масштаб скорости \sqrt{gL} (L – внешний масштаб длины), однако, для представления результатов удобнее использовать внутренний масштаб длины, например, безразмерную высоту существенной волны H_s . Для перехода к этому масштабированию вместо подразумеваемого масштаба длины безразмерную вертикальную скорость w надо нормировать величиной $H_s^{1/2}$. Как видно, свойство автомодельности хорошо проявляется и для такой сложной характеристики, как поверхностная вертикальная скорость: кривые для различных 6 периодов практически неразличимы.

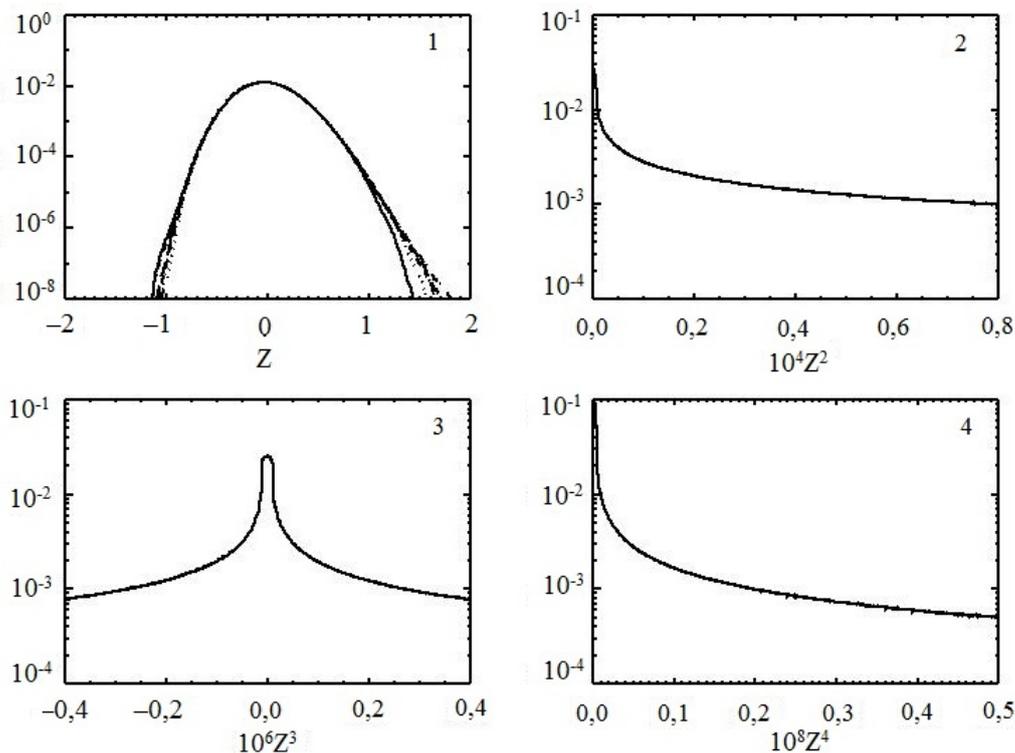


Рис. 6. Распределение вероятностей для четырёх моментов поля возвышения Z^n ($n = 1, 2, 3, 4$), $Z = \eta H_s^{-1}$, где η – возвышение, H_s – высота значительной волны, нормированные с помощью внешнего масштаба длины L и ускорения силы тяжести g для шести последовательных периодов, использованных в рис. 4. На каждой панели все 6 кривых для различных периодов совпадают.

Первичные данные для η и w без нормировки показывают, что распределение моментов сильно зависит от разгона. При введении нормировки распределение моментов оказывается практически не зависящим от разгона и от положения спектра (т. е. волнового числа пика спектра). Это указывает на существование автомодельности поля волн, которое сохраняется несмотря на многократное изменение их энергии. Универсальность распределения для первых моментов Z и W не предопределяет таковую для высоких моментов, которые гораздо более чувствительны к деталям. Этот результат получен с упрощённой моделью, в которой вертикальная скорость определяется не из трёхмерного уравнения для потенциала, а через дополнительное поверхностное граничное условие (11), дополненное гипотезой замыкания (13)–(17).

Для проверки сохранения свойства автомодельности были проведены дополнительные длительные расчёты с полной трёхмерной моделью FWM. Разрешение, использованное в демонстрированных выше расчётах, было недоступно, поэтому число мод принималось равным 513×257 . Соответствующее сеточное поле оказывалось меньше в 4 раза, но затребованная память увеличилась на порядок из-за трёхмерности. Все остальные параметры были заимствованы из AWM. Вероятности возвышения и вертикальной скорости, рассчитанные для двух продолжительных периодов показаны на рис. 8 и 9. На обоих рисунках кривые, относящиеся к разным периодам, полностью совпадают.

Сопоставление рис. 8 с рис. 6, а также рис. 9 с рис. 7 показывает, что распределение вероятностей статистических характеристик соответствующим образом нормированных переменных подтверждает свойство автомодельности ветровых волн. Кроме того, исключительная близость результатов, полученных с полной и ускоренной моделями, указывает на то, что ускоренная двумерная модель может применяться для моделирования динамики многомодового волнового поля в предположении о периодичности.

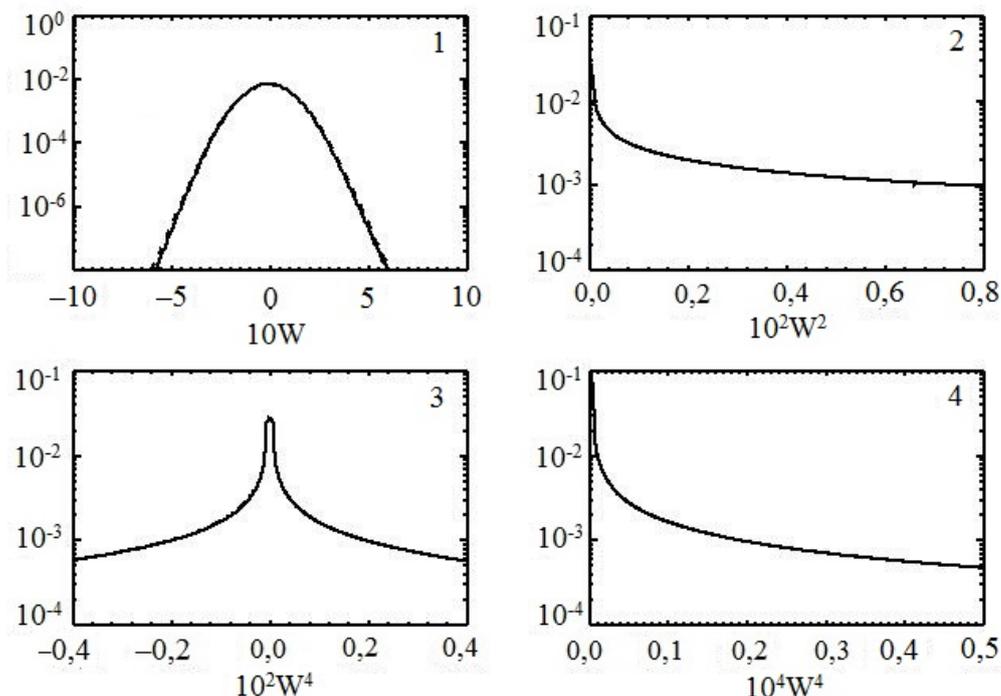


Рис. 7. Распределение вероятностей для четырёх статистических моментов поля вертикальной скорости W_n , ($n = 1, 2, 3, 4$), $W = wH_s^{-1/2}$, где w – вертикальная скорость, H_s – высота существенной волны, нормированные с помощью внешнего масштаба длины L и ускорения силы тяжести g для шести последовательных периодов, использованных в рис. 4. На каждой панели все 6 кривых для различных периодов совпадают.

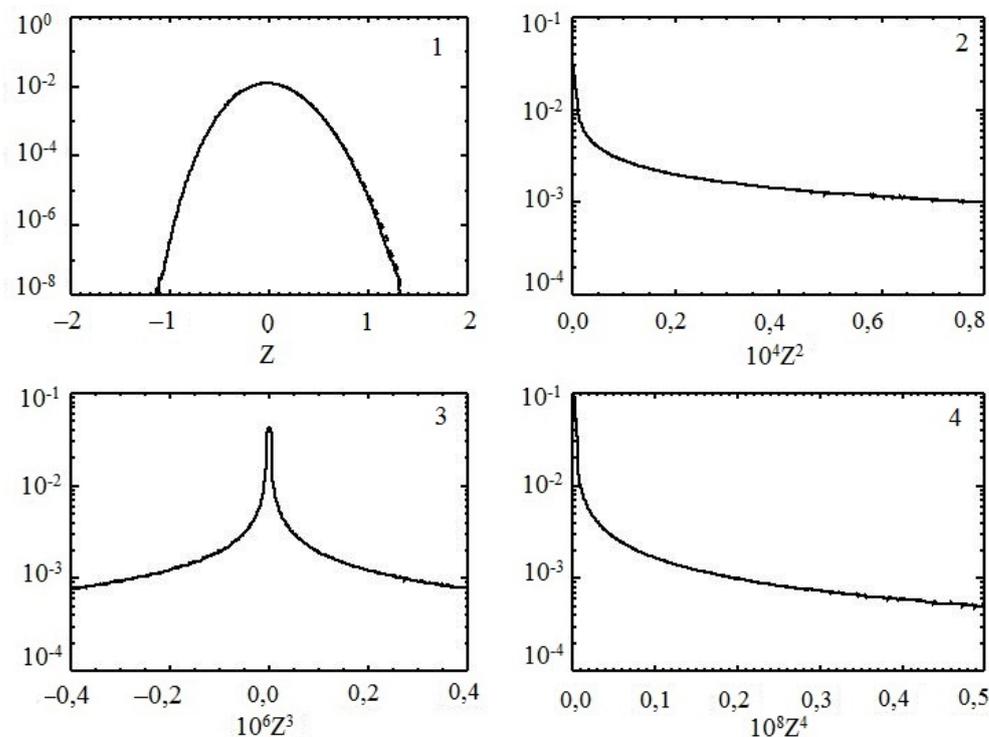


Рис. 8. Те же характеристики, что на рис. 6, но рассчитанные с моделью FWM. Данные получены для различных периодов с разной энергией, но различить их невозможно, т. к. после нормировки на H_s кривые совпадают.

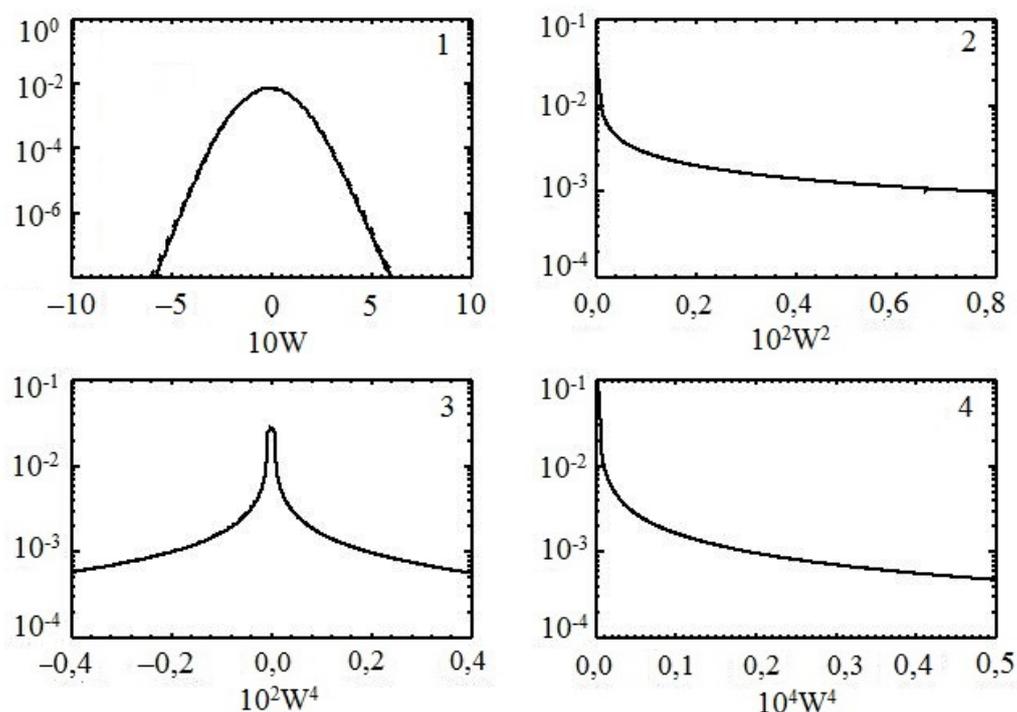


Рис. 9. Те же характеристики, что на рис. 7, но рассчитанные с моделью FWM. Данные получены для различных периодов с разной энергией, но так же, как и на рис. 8, различить их невозможно, т. к. после нормировки на $\sqrt{H_s}$ кривые совпадают.

Заключение

В настоящей работе приведены результаты расчётов эволюции двухмерного морского волнения на основе упрощённой двухмерной модели (AWM). Результаты дополнены аналогичными расчётами с полной трёхмерной моделью (FWM). AWM имеет явное преимущество в быстродействии. Обе модели снабжены одинаковой физикой. Один шаг по времени для AWM с сеточным разрешением 2048×1024 узлов требует 2,8 с, а для FWM с разрешением 1024×512 узлов 13,2 с. AWM с увеличенным в 4 раза по сравнению с FWM разрешением имеет быстродействие в 5 раз выше, чем FWM. Таким образом, эффективное быстродействие AWM примерно в 20 раз выше, чем FWM. Следует отметить, что эти оценки являются ориентировочными, поскольку данные для сравнения быстродействия двух моделей зависят от доли вычислений, не зависящих от схемы решения, например, вычислений физических эффектов и оперативной обработки и записи результатов. Используемые исследовательские версии моделей снабжены очень подробными алгоритмами предварительного анализа и записи результатов в спектральном и сеточном пространствах, которые замедляют процесс.

Приведённые вычисления показывают, что упрощённая модель способна воспроизводить развитие и стабилизацию ветрового волнения. К сожалению, в настоящее время отсутствуют надёжные данные о скорости развития волн под действием ветра. Наиболее подробные данные о развитии волнового спектра даёт аппроксимация JONSWAP, согласно которой энергия волн E растёт прямо пропорционально разгону F , т. е. $E = \gamma F$, где размерный коэффициент γ зависит квадратично от скорости ветра. Полагая для оценок, что разгон F может быть оценён формулой: $F = \int_0^t c_p dt$ (где c_p и t – размерные фазовая скорость в пике спектра и время), получаем: $E = \gamma \int_0^t c dt$ откуда следует, что $dE/dt = \gamma c_p$. Очевидно, что c_p увеличивается во времени, следовательно, энергия E растёт быстрее, чем линейно. В наших расчётах нелинейный рост наблюдается только на начальном этапе, а далее рост замедляется и в конце концов энергия устанавливается на относительно постоянном уровне. Эмпирические данные, освещающие весь

этот процесс на всём его протяжении, отсутствуют, а единственным источником такой информации является, пока, только численное моделирование. Его результаты не очень надёжны, поскольку спектральные свойства процессов притока энергии и её диссипации известны недостаточно хорошо. В настоящее время наши работы посвящены скорее созданию техники таких исследований, чем детальному изучению реальных процессов. Тем не менее, фазо-разрешающая формулировка модели волн безусловно более надёжна и подробна, чем спектральная. В настоящее время фазо-разрешающие модели могут применяться для моделирования реальных процессов в небольших акваториях.

С точки зрения физики ветрового волнения наиболее важным результатом, полученным в настоящих расчётах, является малая зависимость статистических характеристик, нормированных соответствующим образом переменных от степени развития волнения. Это свойство продемонстрировано на примере поля возвышения и вертикальной скорости на поверхности. Последняя характеристика особенно показательна, так как она является главным объектом трансформации трёхмерной формулировки в двумерную. Представляется, что замеченное свойство автомодельности сохранится и для других характеристик.

В целом, предложенная ускоренная модель не является точной с математической точки зрения, поскольку основана на эмпирической связи между вертикальной скоростью и её вертикальной производной. Следует, однако, уточнить, что имеется в виду под термином «точность». Точной можно назвать адиабатическую модель с бесконечно высоким разрешением или модель с конечным разрешением на малых интервалах времени. При практически возможном разрешении или увеличении интервала интегрирования модель остаётся реалистичной, если в ней учтены притоки и стоки энергии, которые противоречат предположению о потенциальности. Важно, что в настоящее время результаты, полученные двумя моделями, оказываются практически неразличимыми. Ускоренная модель позволяет проводить неоднократные вычисления с целью усовершенствования алгоритмов параметризации физических процессов. В дальнейшем ничто не мешает использовать для расчётов точную модель.

Благодарности. Исследование было выполнено в рамках государственного задания по теме №FMWE-2024-0028.

Список литературы

- Babanin A. Breaking and Dissipation of Ocean Surface Waves. — Cambridge University Press, 2011. — DOI: [10.1017/CBO9780511736162](https://doi.org/10.1017/CBO9780511736162).
- Causon D. M., Mingham C. G., Qian L. Developments in multi-fluid finite volume free surface capturing methods // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — С. 397–427. — DOI: [10.1142/9789812836502_0011](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0011).
- Chalikov D. Correction to: Accelerated reproduction of 2-D periodic waves // Ocean Dynamics. — 2021a. — Т. 71, № 4. — С. 491–491. — DOI: [10.1007/s10236-021-01450-3](https://doi.org/10.1007/s10236-021-01450-3).
- Chalikov D. High-Resolution Numerical Simulation of Surface Wave Development under the Action of Wind // Geophysics and Ocean Waves Studies. — IntechOpen, 2021b. — DOI: [10.5772/intechopen.92262](https://doi.org/10.5772/intechopen.92262).
- Chalikov D. V. Numerical Modeling of Sea Waves. — Springer International Publishing, 2016. — DOI: [10.1007/978-3-319-32916-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32916-1).
- Ducrozet G., Bonnefoy F., Le Touzé D. *u dp*. 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas // Natural Hazards and Earth System Sciences. — 2007. — Т. 7, № 1. — С. 109–122. — DOI: [10.5194/nhess-7-109-2007](https://doi.org/10.5194/nhess-7-109-2007).
- Ducrozet G., Bonnefoy F., Le Touzé D. *u dp*. HOS-ocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method // Computer Physics Communications. — 2016. — Т. 203. — С. 245–254. — DOI: [10.1016/j.cpc.2016.02.017](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.02.017).
- Engsig-Karup A. P., Bingham H. B., Lindberg O. An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves // Journal of Computational Physics. — 2009. — Т. 228, № 6. — С. 2100–2118. — DOI: [10.1016/j.jcp.2008.11.028](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.028).
- Engsig-Karup A. P., Madsen M. G., Glimberg S. L. A massively parallel GPU-accelerated model for analysis of fully nonlinear free surface waves // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2011. — Т. 70, № 1. — С. 20–36. — DOI: [10.1002/flid.2675](https://doi.org/10.1002/flid.2675).

- Fructus D., Clamond D., Grue J. *u dp*. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations // Journal of Computational Physics. — 2005. — Т. 205, № 2. — С. 665–685. — DOI: [10.1016/j.jcp.2004.11.027](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.11.027).
- Greaves D. Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — С. 357–396. — DOI: [10.1142/9789812836502_0010](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0010).
- Issa R., Violeau D., Lee E.-S. *u dp*. Modelling nonlinear water waves with RANS and LES SPH models // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — С. 497–537. — DOI: [10.1142/9789812836502_0014](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0014).
- Kim K. S., Kim M. H., Park J.-C. Development of Moving Particle Simulation Method for Multiliquid-Layer Sloshing // Mathematical Problems in Engineering. — 2014. — Т. 2014. — С. 1–13. — DOI: [10.1155/2014/350165](https://doi.org/10.1155/2014/350165).
- Kim Y. J., Baek H. M., Yang Y. J. *u dp*. A Study on the High-Order Spectral Model Capability to Simulate a Fully Developed Nonlinear Sea States // Journal of Ocean Engineering and Technology. — 2023. — Т. 37, № 1. — С. 20–30. — DOI: [10.26748/KSOE.2022.034](https://doi.org/10.26748/KSOE.2022.034).
- Lubin P., Caltagirone J.-P. Large eddy simulation of the hydrodynamics generated by breaking waves // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — С. 575–604. — DOI: [10.1142/9789812836502_0016](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0016).
- Ma Q. W., Yan S. Qale-FEM method and its application to the simulation of free responses of floating bodies and overturning waves // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — С. 165–202. — DOI: [10.1142/9789812836502_0005](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0005).
- Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows // Journal of Fluid Mechanics. — 1957. — Т. 3, № 02. — С. 185. — DOI: [10.1017/S0022112057000567](https://doi.org/10.1017/S0022112057000567).
- Thomas L. H. Elliptic problems in linear differential equations over a network. — Columbia University (New York) : Watson Scientific Computing Laboratory Report, 1949.
- Tolman H. L. User Manual and System Documentation of WAVEWATCH-III Version 3.14. — NOAA/NWS/NCEP/MMAB, 2009. — 220 с.
- Young D.-L., Wu N.-J., Tsay T.-K. Method of fundamental solutions for fully nonlinear water waves // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — С. 325–355. — DOI: [10.1142/9789812836502_0009](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0009).

NUMERICAL STUDY ON STATISTICAL CHARACTERISTICS OF DEVELOPING WAVES

K. V. Fokina^{**1,2} , and D. V. Chalikov^{1,3} 

¹Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia

²Russian State Hydrometeorological University, St. Petersburg, Russia

³University of Melbourne, Victoria, Australia

****Correspondence to:** Karina Fokina, fokinakarina@yandex.ru

Long-term calculations of the evolution of three-dimensional waves ranging from the early stage to energy stabilization were made on the basis of a two-dimensional phase-resolving model. The evolution of the main integral and spectral characteristics is analyzed along with the probability distribution for the elevation field and vertical velocity. The apparent property of self-similarity (i.e. the independence of the statistical structure of the field from the degree of wave development) for the wave field on the example of the first four moments for normalized fields of elevation and surface vertical velocity is shown. The conclusion is confirmed by the calculations with a three-dimensional model.

Keywords: phase-resolving modeling, wave spectrum, wind waves, energy input, dissipation of wave energy, statistical characteristics of waves.

Citation: Fokina K. V., and D. V. Chalikov (2024), Numerical Study on Statistical Characteristics of Developing Waves, *Russian Journal of Earth Sciences*, 24, ES2010, <https://doi.org/10.2205/2024ES000878> EDN: SNFMCI

Received: 5 September 2023

Accepted: 10 November 2023

Published: 14 June 2024



© 2024. The Authors.

References

- Babanin A. Breaking and Dissipation of Ocean Surface Waves. — Cambridge University Press, 2011. — DOI: [10.1017/CBO9780511736162](https://doi.org/10.1017/CBO9780511736162).
- Causon D. M., Mingham C. G., Qian L. Developments in multi-fluid finite volume free surface capturing methods // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 397–427. — DOI: [10.1142/9789812836502_0011](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0011).
- Chalikov D. Correction to: Accelerated reproduction of 2-D periodic waves // *Ocean Dynamics*. — 2021a. — Vol. 71, no. 4. — P. 491–491. — DOI: [10.1007/s10236-021-01450-3](https://doi.org/10.1007/s10236-021-01450-3).
- Chalikov D. High-Resolution Numerical Simulation of Surface Wave Development under the Action of Wind // *Geophysics and Ocean Waves Studies*. — IntechOpen, 2021b. — DOI: [10.5772/intechopen.92262](https://doi.org/10.5772/intechopen.92262).
- Chalikov D. V. Numerical Modeling of Sea Waves. — Springer International Publishing, 2016. — DOI: [10.1007/978-3-319-32916-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32916-1).
- Ducrozet G., Bonnefoy F., Le Touzé D., *et al.* 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. — 2007. — Vol. 7, no. 1. — P. 109–122. — DOI: [10.5194/nhess-7-109-2007](https://doi.org/10.5194/nhess-7-109-2007).
- Ducrozet G., Bonnefoy F., Le Touzé D., *et al.* HOS-ocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method // *Computer Physics Communications*. — 2016. — Vol. 203. — P. 245–254. — DOI: [10.1016/j.cpc.2016.02.017](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.02.017).
- Engsig-Karup A. P., Bingham H. B., Lindberg O. An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves // *Journal of Computational Physics*. — 2009. — Vol. 228, no. 6. — P. 2100–2118. — DOI: [10.1016/j.jcp.2008.11.028](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.028).

- Engsig-Karup A. P., Madsen M. G., Glimberg S. L. A massively parallel GPU-accelerated model for analysis of fully nonlinear free surface waves // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2011. — Vol. 70, no. 1. — P. 20–36. — DOI: [10.1002/fld.2675](https://doi.org/10.1002/fld.2675).
- Fructus D., Clamond D., Grue J., *et al.* An efficient model for three-dimensional surface wave simulations // *Journal of Computational Physics*. — 2005. — Vol. 205, no. 2. — P. 665–685. — DOI: [10.1016/j.jcp.2004.11.027](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.11.027).
- Greaves D. *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves* // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 357–396. — DOI: [10.1142/9789812836502_0010](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0010).
- Issa R., Violeau D., Lee E.-S., *et al.* Modelling nonlinear water waves with RANS and LES SPH models // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 497–537. — DOI: [10.1142/9789812836502_0014](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0014).
- Kim K. S., Kim M. H., Park J.-C. Development of Moving Particle Simulation Method for Multiliquid-Layer Sloshing // *Mathematical Problems in Engineering*. — 2014. — Vol. 2014. — P. 1–13. — DOI: [10.1155/2014/350165](https://doi.org/10.1155/2014/350165).
- Kim Y. J., Baek H. M., Yang Y. J., *et al.* A Study on the High-Order Spectral Model Capability to Simulate a Fully Developed Nonlinear Sea States // *Journal of Ocean Engineering and Technology*. — 2023. — Vol. 37, no. 1. — P. 20–30. — DOI: [10.26748/KSOE.2022.034](https://doi.org/10.26748/KSOE.2022.034).
- Lubin P., Caltagirone J.-P. Large eddy simulation of the hydrodynamics generated by breaking waves // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 575–604. — DOI: [10.1142/9789812836502_0016](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0016).
- Ma Q. W., Yan S. Gale-FEM method and its application to the simulation of free responses of floating bodies and overturning waves // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 165–202. — DOI: [10.1142/9789812836502_0005](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0005).
- Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1957. — Vol. 3, no. 02. — P. 185. — DOI: [10.1017/S0022112057000567](https://doi.org/10.1017/S0022112057000567).
- Thomas L. H. Elliptic problems in linear differential equations over a network. — Columbia University (New York) : Watson Scientific Computing Laboratory Report, 1949.
- Tolman H. L. User Manual and System Documentation of WAVEWATCH-III Version 3.14. — NOAA/NWS/NCEP/MMAB, 2009. — 220 p.
- Young D.-L., Wu N.-J., Tsay T.-K. Method of fundamental solutions for fully nonlinear water waves // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 325–355. — DOI: [10.1142/9789812836502_0009](https://doi.org/10.1142/9789812836502_0009).