

# ВАРИАЦИОННО-КОМБИНАТОРНЫЙ ПОДХОД ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА. СЛУЧАЙ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ

И. Э. Степанова<sup>\*,1</sup> , И. И. Колотов<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет,  
Москва, Россия

\* **Контакт:** Инна Эдуардовна Степанова, e-mail: tet@ifz.ru

В работе описывается методика применения вариационно-комбинаторного подхода при решении обратных линейных и нелинейных задач геофизики в рамках теории дискретного потенциала. Информация, получаемая благодаря дистанционному зондированию Земли и планет, носит исключительно дискретный характер, несмотря на поистине огромные массивы данных. Комбинаторные методы дискретной математики позволяют, если можно так выразиться, организовать «селективный отбор» информации о физических полях: аналитические аппроксимации строятся только по тем значениям элементов поля, которые могут быть надежно идентифицированы как полезный сигнал, а не случайная или систематическая помеха.

**Ключевые слова:** комбинаторный подход, дискретный потенциал; геологическая структура; интегральные представления.

**Цитирование:** Степанова, И. Э., И. И. Колотов Вариационно-комбинаторный подход при решении обратных задач геофизики в рамках теории дискретного потенциала. Случай геологических сред со сложной структурой // Russian Journal of Earth Sciences. — 2025. — Т. 25. — ES3002. — DOI: 10.2205/2025es001000 — EDN: QYNSZG

## 1. Введение

В работе [Stepanova and Kolotov, 2024b] мы показали, как методы дискретной математики могут быть применены при обработке больших и сверхбольших массивов геофизических данных. Поскольку количество получаемой благодаря спутниковому зондированию Земли и планет информации за последние несколько лет многократно возросло (можно сказать, что наблюдается в некотором смысле «неконтролируемый» всплеск числа измерений различных физических величин), то без предварительного отбора и сортировки данных интерпретировать их бессмысленно: количество не перейдет без дополнительных усилий со стороны исследователя в качество. В указанной выше работе мы изложили сущность нового алгоритма работы с геофизическими данными, сделав упор на разбиении исходной выборки на блоки, соответствующие характеру решаемой задачи. В настоящей статье приводятся результаты дальнейших исследований в области комбинаторного анализа и последующего решения различных обратных задач геофизики в рамках теории дискретного потенциала [Арсанукаев, 2004; Страхов и др., 1996]. Изложенные в работе методы и подходы могут быть полезны при построении аналитических моделей физических полей Земли и планет Солнечной системы. В свою очередь, модели полей имеют важное значение для содержательной геологической интерпретации различных геофизических данных.

<https://elibrary.ru/QYNSZG>

Получено: 9 октября 2024 г.

Принято: 17 февраля 2025 г.

Опубликовано: 24 марта 2025 г.



© 2025. Коллектив авторов.

Применявшийся нами метод линейных интегральных представлений [Раевский и Степанова, 2015; Stepanova and Kolotov, 2024a; Stepanova and Strakhov, 2002a,b] теперь будет играть вспомогательную роль: он будет выступать в качестве средства контроля получаемых результатов, а также для того чтобы находить эквивалентные по внешнему полю двумерные распределения масс. Двумерные распределения источников (мы их рассмотрим на семействе плоскостей и будем использовать декартову систему координат во всех случаях) – это своеобразное изображение реального трехмерного объекта, полученное с помощью сечения этого объекта некоторой плоскостью (ориентация которой заранее неизвестна и считается параметром задачи, подлежащим определению). В принципе, метод интегральных представлений может применяться и в трехмерном варианте, но при тестировании новой методики предпочтительнее как бы делать «срезы» исследуемого источника поля.

Методика первичной сортировки, описанная нами в [Stepanova and Kolotov, 2024b], может дополняться новыми концептуальными положениями и алгоритмами. Однако слишком сложным и громоздким процесс, если можно так выразиться, «полуколичественного» анализа данных быть не должен. Поэтому важно формализовать на языке математики процедуру фильтрации полученной информации о реальных физических полях таким образом, чтобы свести к минимуму произвол в выборе тех или иных характеристик как самих полей, так и их источников. Для этого можно применить комбинаторную схему с фиксированным числом возрастных и убываний некоторых величин из исследуемого массива данных. Что касается источников гравитационного, магнитного и других полей, то при классификации такого рода объектов можно анализировать их геометрические свойства. В дальнейшем мы будем описывать все геофизические явления единообразно: определим единое для источников и физических полей сеточное пространство, систему координат в этом сеточном пространстве, норму элементов, операторы, действующие на сеточном пространстве и т.п. Поскольку любое сеточное пространство идентифицируется после задания шагов сетки и начала координат, то, фактически, все операции над векторами сеточного пространства можно свести к сложению, вычитанию и умножению на элементы основного поля (над которым это пространство определено). Именно по этой причине функции целочисленного аргумента играют большую роль при решении обратных задач в рамках теории дискретного потенциала.

В. Н. Страхов доказал в [Страхов, 1977], что существует несчетное множество эквивалентных по внешнему гравитационному полю трехмерных непрерывных распределений масс, не отличающихся какой бы то ни было симметрией. Для выделения единственного решения линейной (а тем более – нелинейной) задачи геофизики необходим достаточно гибкий алгоритм, который, однако, не должен быть слишком затратным (имеется в виду время вычислений различных величин на компьютерах, требуемая для этого оперативная и постоянная память и т.п.). В некоторых случаях единственного решения и не требуется (когда достаточно построения метрологических аппроксимаций потенциальных полей), но всегда важно установить, какие данные являются критически необходимыми для создания аналитической модели поля, а какие – избыточными.

### **1.1. Применение комбинаторного подхода при первичной сортировке данных**

Набор данных об элементах физических полей Земли или планет представляет собой дискретное множество  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ , состоящее из  $v$  элементов. Элементы такого множества – значения компонент векторного поля (а также функций от компонент) в точках некоторой сети наблюдений. На значения  $x_1, x_2, \dots, x_v$  обычно накладывается ряд ограничений, обусловленных как характером поставленной обратной геофизической задачи, так и способами получения информации об объектах.

Каждая точка из набора должна характеризоваться тремя координатами: либо сферическими, либо декартовыми. В последнем случае рассматривается планетоцентрическая система координат.

При первичной сортировке данных наблюдений могут применяться алгоритмы работы с блок-схемами и  $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигурациями [Сачков, 1977].

Методы комбинаторного анализа позволяют оценить число точек наблюдения, которые содержатся в том или ином подмножестве всего ансамбля. Например, если разбить полигон на  $r$  областей и задаться вопросом о том, какие значения компонент поля или значения функции от этих элементов встречаются во всех областях рассматриваемого полигона, то по значениям нумератора (или производящей функции, [см. Сачков, 1977]) можно будет судить о количестве таких данных.

Если изначально разбить все окружающее планету пространство на зоны, удаленные от фиксированного центра на различные расстояния, то свойства данных наблюдений удобно будет описывать в терминах нумератора в коммутативном несимметричном базисе [Сачков, 1977]. В некоторых зонах измерения могут отсутствовать, в то время как в отдельных областях может быть сосредоточено достаточно большое число данных.

Благодаря различным конструкциям, применяемым в комбинаторике (например, производящей функции или нумератору) можно представить себе степень неоднозначности решения обратной задачи, сформулированной в рамках некоторой математической модели геофизического поля.

Структурно-параметрический подход, который применялся нами при решении различных обратных геофизических задач, предполагает, что каждому геологическому объекту соответствует тот или иной эквивалентный по внешнему полю носитель масс [Stepanova and Strakhov, 2002a,b]. Комбинаторные методы дискретной математики позволяют формализовать это требование в том смысле, что различные носители взаимно-однозначно соответствуют блокам, на которые разбито некоторое дискретное множество точек  $X$ . С каждым блоком, в свою очередь, связан парциальный вектор в общем векторе значений физической величины [Stepanova and Kolotov, 2024b] (мы считаем при этом, что принцип суперпозиции физических полей справедлив):

$$X = (\mathbf{x}_{\alpha_1}; \mathbf{x}_{\alpha_2}; \dots; \mathbf{x}_{\alpha_n}), \quad \mathbf{x}_{\alpha_k} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{\alpha_k}}) \subset X, \quad (1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m, \quad \alpha_j \in \Lambda_j, \alpha_j \geq 0, \alpha_j \in \mathbb{Z}.$$

В работе [Stepanova and Kolotov, 2024b] мы подробно описали процесс отбора данных и выделения набора критически важных для «реконструкции» геологической среды свойств  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Важно отметить, что к набору свойств могут относиться и сведения о характере получения данных: тип прибора, время измерения, точность измерения и т.д. Известно, что магнитное поле планеты взаимодействует с Солнечным ветром, поэтому «ночные» и «дневные» выборки неравнозначны с точки зрения построения математической модели внутреннего магнитного поля той или иной планеты Солнечной системы.

Будем считать, что алгоритм сортировки информации был применен к выборке из  $L$  элементов (содержащей компоненты гравитационного, магнитного и других полей). Сеть наблюдений, может быть как регулярной, так и нерегулярной.

Основные геометрические свойства сети наблюдений определены на первом этапе сортировки данных. К этим свойствам можно отнести границы полигона, гладкость кривой, описывающей границу (для плоских областей) и поверхности, охватывающей полигон, – для трехмерных задач. Кроме того, в каждой подобласти нужно знать степень контрастности поля (величину модуля векторного поля в каждой точке, модуль градиента поля и т.п.).

Далее, при одноэтапном процессе отбора данных, предлагалось выбрать для каждой подобласти 10 процентов минимальных по модулю значений, выделить из общего набора точки для контроля качества аппроксимации, а затем строить аналитические аппроксимации полей по некоторым выборкам (последовательно исключая или включая в набор для аппроксимации «плохие» и, соответственно, «хорошие» элементы.

В настоящей статье мы рассматриваем двухуровневый процесс интерпретации геофизических данных. Поэтому первый этап заканчивается делением всего набора данных на блоки, структура и количество которых зависят от характера решаемой обратной задачи.

Задание  $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигурации как раз и позволяет достичь целей первого этапа сортировки данных. Опишем алгоритм разбиения множества данных наблюдений на блоки.

Если нам известны  $L$  значений некоторой физической величины, измеренной на некотором полигоне, то числа  $(b, v, r, k, \lambda)$  будут иметь следующий смысл:

1.  $v$  характеризует расстояние от данной точки до выделенного фиксированного центра (например, центра подобласти);
2.  $r$  точек находятся на одном и том же расстоянии  $v$  от выделенного центра.
3.  $b$  – «отвечает» углу  $\vartheta$  в сферической системе координат: у нас имеется столько различных значений этого угла;
4.  $k$  – точек лежит на конусе, характеризующемся фиксированным значением угла  $\vartheta$ ;  $vr = bk$ ;
5. точки, соответствующие различным  $v$ , встречаются попарно ровно на  $\lambda$  конусах.

При необходимости, сферические координаты можно заменить декартовыми (в планетоцентрической системе координат): все математические выкладки становятся существенно проще.

Если в  $N$  точках наблюдений измеряется  $M$  значений некоторой физической величины (например, три компоненты вектора магнитной индукции и три компоненты гравитационного поля), то  $r$  в данном случае – число некоторых опорных точек, или, центров которыми они, эти величины, должны обладать примем: а) некоторый диапазон расстояний точки наблюдения от фиксированного центра; б) модуль вектора магнитной индукции (или некоторый диапазон модулей); в) модуль гравитационного поля (или также диапазон его изменения). Массив точек измерений будет теперь состоять из блоков. Если различных расстояний от точки до какого-либо центра исследования имеется  $v$ , внутри  $s$ -го блока может находиться ровно  $k$  элементов, то всего точек, таким образом структурированных, будет  $vr = bk = N_1 \leq N$ .

Необходимо подчеркнуть, что мы не стараемся охватить все результаты измерений, равно как и описать все свойства геологической среды и изучаемых полей. Это невозможно. Но ключевые параметры полигонов, среды, полей, создаваемых (неизвестными!) источниками, при комбинаторном подходе могут быть выявлены.

Как на первом этапе сортировки данных, так и на втором можно рассматривать перестановки элементов последовательности измерений с  $r$  возрастаниями и  $s$  убываниями.

Убываниями в последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_N$  называются пары элементов  $a_j > a_{j+1}$ .

Перед первым элементом  $a_1$ , равно как и после последнего элемента  $a_N$  возрастаний нет.

Для числа перестановок с  $r$  возрастаниями и  $s$  убываниями справедлива следующая рекуррентная формула [Сачков, 1977]:

$$A(r, s) = (r + 1)A(r, s - 1) + (s + 1)A(r - 1, s), \quad N - 1 = r + s.$$

В качестве «возрастаний» и «убываний» могут выступать самые разные характеристики как полей, так и полигонов (частей полигонов). Например, если на первом этапе сортировки данных мы выяснили, что имеется некоторое количество «оврагов» и «холмов» на карте изолиний какой-либо компоненты поля, то можно разбить весь полигон на подобласти с фиксированным числом таких поднятий и спусков. Кроме того, важным моментом является следующий (и именно он играет решающую роль при постановке вариационных задач в рамках предлагаемого нами подхода для многосвязных областей).

Если мы хотим проинтерпретировать только те данные, которые получены в заданной подобласти всего полигона, и не должны включать в выборку для аппроксимации элементы, содержащиеся в некотором множестве подобластей, то указанные «выброшенные» подобласти как раз и можно ранжировать по возрастанию площади или объема.

Результатом первого этапа сортировки данных из набора (1) можно считать выделение крупных геологических структур, разбиение всего полигона на отдельные районы для исследований, выявление областей с «нетипичным» поведением физических полей (разломов, прогибов, зон вулканической активности и т.п.). Аппроксимацию по всему ансамблю данных можно выполнить, но относительная точность модели в точках с минимальным по модулю элементом поля будет невысока.

### **1.2. Второй этап интерпретации данных наблюдений в рамках комбинаторного подхода**

Второй этап интерпретации данных – это, фактически, работа с каждым отдельным блоком, а также сравнение результатов аппроксимации в пограничных областях (областях пересечения двух и более блоков). Подчеркнем: алгоритм деления данных на блоки не предполагает нулевое пересечение любых двух различных подобластей. Те блоки, которые удалось вычлениить из общего набора данных, могут, в свою очередь, сложной геометрией. Именно по этой причине необходима «экспертиза» каждого отдельного сегмента данных. На первом этапе интерпретации мы можем получить сложные конструкции как вследствие большого объема информации, относящейся к тому или иному геологическому объекту или району исследования, так и вследствие морфологических особенностей изучаемого региона или самого элемента поля. Вторым этапом можно, следовательно, считать в некотором смысле продолжением процедуры сортировки и интерпретации, начатой на первом этапе, но рассмотрение всех процессов при этом происходит в другом масштабе: мы движемся от глобального варианта аппроксимаций полей к локальному. Однако в действительности все оказывается не совсем так просто и однозначно: геологические объекты разной мощности нельзя представлять себе как своеобразную «матрешку», хотя такой подход в математике довольно широко распространен. Цель наших исследований – определить основные критерии «качества» выборки с точки зрения построения адекватной реальности модели физического поля, а также поиск оптимальных сетей наблюдений («шаблонов»), которые позволили бы в большинстве случаев дать представление о возможных источниках поля. Поскольку в локальном варианте все функции зависят от декартовых координат и начало координат не фиксировано, то мы оказываемся в ситуации, когда можно линейной заменой переменных перевести любой полигон в некоторый эталонный. Можно было бы считать эталоном куб со стороной 1 и одной вершиной, расположенной в начале координат, но мы будем работать и с другими шаблонами сетей наблюдения (чтобы наши модельные расчеты несли в себе геофизическое содержание).

Поскольку наиболее информативными являются результаты измерения вблизи поверхности планет, то нам кажется целесообразным разбиение пространства в непосредственной близости от планеты на большее число зон, нежели вдали от нее.

Такого рода данные целесообразно делить на группы элементов, которые отличаются угловыми координатами. Для каждой из групп находится наилучшее приближение к измеренному полю, при этом строятся аппроксимации элементов поля при различных конфигурациях узлов наблюдений. Безусловно, все разбиения элементов на группы мы охватить не можем: число таких конфигураций при больших  $L$  огромно. Однако конфигурации, важные для каждого конкретного случая постановки обратной задачи, следует проанализировать.

Как на первом, так на втором этапах интерпретации информации о физических полях Земли и планет можно рассматривать области, в которых в нескольких местах имеет место так называемый выход на нормальное поле: аномалии наблюдаются вблизи нескольких центров (их и можно принять за центры блоков, на которые разбивается

область), затем модуль элемента поля плавно убывает до нуля, а потом снова начинает расти. Такого рода области пространства мы назовем многосвязными областями (по аналогии с двумерными многосвязными областями). Более строгое математическое определение нам не требуется, поскольку вариационные постановки мы будем изучать в некоторой канонической области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с несколькими вырезанными из него параллелепипедами меньшего размера. Для такого рода объектов известна резольвента оператора Лапласа, и именно поэтому мы можем обосновать корректность применения метода матричной прогонки при поиске решений линейных обратных задач геофизики. Помимо этого, постановка задач в трехмерных «многосвязных» областях позволяет лучше представлять себе, как решаются обратные задачи геофизики смешанного типа: когда в одном или нескольких слоях бесконечного простирания присутствуют локальные неоднородности (включения). Таким образом, рудные и структурные обратные задачи гравиметрии можно объединить в один «кластер», если вмещающие слои считать прямоугольными параллелепипедами большого размера. Напомним читателю, что мы работаем в сеточном пространстве, где все определяется шагами сетки по каждому из направлений и понятие «бесконечности» не следует понимать в узком смысле.

Мы будем искать эквивалентные по внешним полям сеточные массы или сеточные магнитные моменты с использованием различных регуляризирующих алгоритмов [Тухонов и др., 1990], поскольку задачи такого типа являются некорректно поставленными в подавляющем большинстве случаев. Метод матричной прогонки можно применить также для отыскания сеточного поля по известному распределению сеточных масс.

На втором этапе можно «прогнать» алгоритм деления данных на блоки [Stepanova and Kolotov, 2024b] еще раз, выявляя более мелкие неоднородности (неоднородности локального характера). При этом на втором этапе желательно уже работать с региональными и локальными данными о полях. Нормальную (или региональную) компоненты поля нужно исключить, используя результаты интерпретации первого этапа. Напомним читателю, что аппроксимацию элемента поля можно строить и на первом этапе интерпретации, после первичной сортировки данных. Мы получим матрицу СЛАУ, к которой редуцируется обратная геофизическая задача, с не очень хорошими свойствами (СЛАУ может быть плохо обусловленной), но некоторое приемлемое для практических целей приближение к нормальному или региональному полю так найти можно [Раевский и Степанова, 2015; Stepanova and Strakhov, 2002a,b].

Речь идет об областях, подлежащих более детальному изучению: в них нужно взять больше элементов из выборки, чем в других зонах. Если же мы сформулируем вариационную постановку сразу для всего массива разнородных и разноточных данных (зачастую еще и зависящих от времени), то качество приближенного решения в интересующей нас области может оказаться неудовлетворительным по причине неоднозначности решения обратной задачи.

## 2. Вариационная постановка для определения гравитационного поля. Декартова система координат. Многосвязные области

В [Арсанукаев, 2004; Страхов и др., 1996] приводятся основные формулы теории дискретных гравитационного и магнитного потенциалов, а также примеры постановок вариационных задач по определению гравитационного и магнитного полей в сеточных пространствах.

Аналогами операторов Лапласа и Пуассона в сеточном пространстве  $X_n^{(S)}$  ( $n$  измерений) являются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta\{V_S(x^{(S)})\} &= 0; \\ \Delta\{V_S(x^{(S)})\} &= -\frac{GC_n m_S(x^{(S)})}{H^{n-2}}, \quad H = \left(\prod_{k=1}^n h_k\right)^{\frac{1}{n}}, \quad m_S(x^{(S)}) = H^n \rho(x^{(S)}). \end{aligned} \quad (2)$$

В (2)  $\Lambda$  – выбранный конечноразностный аналог оператора Лапласа, а  $m_S(x^{(S)}) = H^n \rho(x^{(S)})$  – значения сеточных масс, порождающих сеточное гравитационное поле;  $h_k$  – шаг по  $k$ -ому направлению в декартовой системе координат;  $G$  – гравитационная постоянная;  $C_n$  – константа, зависящая от размерности пространства, в трехмерном пространстве:  $C_3 = 4\pi$ .

Оператор Лапласа в (2) будем считать заданным на шаблоне «крест» [Самарский и Николаев, 1978]. Тогда для трехмерного сеточного пространства будем иметь:

$$\Lambda^+(V_S(x^{(S)})) = -3 \left( \sum_{p=1}^3 C_p \right) V_S(x^{(S)}) + \sum_{p=1}^3 \{ V_S(x^{(S)} - h_p e_p) + V_S(x^{(S)} + h_p e_p) \} = 0,$$

$$C_p = \frac{H^3}{h_1 h_2 h_3}, \quad H = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}, \quad x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}), \quad x_p^{(S)} = kh_p, \quad -K \leq k \leq +K; \quad (3)$$

$$h_p = \text{const}, \quad p = 1, 2, 3; \quad |x_p^{(S)}| \leq d_p = Kh_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

Трехмерное сеточное пространство (т.е. неограниченное множество точек  $x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \dots, x_n^{(S)})^T$ ,  $x_k^{(S)} = ph_k$ ;  $-\infty < p < +\infty$ ,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $h_k = \text{const}$ , заменяется ансамблем, или семейством, расширяющихся компактов, представляющих собой прямоугольные параллелепипеды  $|x_p^{(S)}| \leq d_p = K_n h_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ ; здесь  $d_p$ ,  $K_n$  и  $h_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , – некоторые положительные константы, причем  $K_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

Как видно из соотношений (2)–(3), дискретный потенциал – это некоторая сеточная функция, определенная, вообще говоря, во всем трехмерном сеточном пространстве. Там, где есть источники поля, эта функция удовлетворяет уравнению Пуассона (в правой части которого как раз и стоят источники сигнала); в дополнительной к носителю масс области дискретный потенциал – гармоническая функция (в конечно-разностном, разумеется, смысле). Граничные условия и характер изменения дискретного потенциала на бесконечности неизвестны.

Для выделения из несчетного множества решений уравнения (2) или (3) оптимального в некотором смысле вектора мы поступим следующим образом.

Сначала определим некоторую сеточную область, в которой будем искать дискретный потенциал –  $D_S$ . Вектора сеточного пространства принадлежат этой области:  $x^{(S)} \in D_S$ . Далее, рассмотрим  $E(D_S)$  – евклидову норму в сеточной области  $D_S$ ;  $\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  – неотрицательный функционал на векторах одинаковой размерности  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{z}$ . Допустим также, что носители масс содержатся в некотором подмножестве точек сеточного пространства:  $\xi^{(S)} \in J_S$ .  $\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$  часто представляет собой квадрат евклидовой нормы разности между значениями дискретного потенциала  $V_S(x^{(S)})$  и значениями в тех же точках заданной функции  $g_S(x^{(S)})$ .

Примем, что для рассматриваемых нами полей справедлив принцип суперпозиции (для гравитационного поля он справедлив всегда, а для магнитного – в случае слабых полей). Тогда можно представить дискретный потенциал в следующем виде:

$$V_S(x^{(S)}) = \sum_{\xi^{(S)} \in J_S} m_S(\xi^{(S)}) \Omega_n^{(S)}(x^{(S)} - \xi^{(S)}). \quad (4)$$

Фигурирующее в (4) сеточное фундаментальное решение оператора Лапласа  $\Omega_n^{(S)}(x^{(S)})$  определяется из соотношений:

$$\Delta(\Omega_n^{(S)}(x^{(S)})) = -\frac{C_n}{H^{n-2}} e(x^{(S)}), \quad (5)$$

$$e(x^{(S)}) = \begin{cases} 1, & x^{(S)} = 0, \\ 0, & |x^{(S)}| > 0. \end{cases} \quad (6)$$

В (4)  $J_S$  есть совокупность векторов координат  $\xi^{(S)}$  тех узлов сетки, в которых имеются ненулевые сеточные массы; иначе говоря,  $J_S$  – это сеточный носитель источников поля. Мы подчеркивали в [Stepanova and Kolotov, 2024b], что для однозначной разрешимости задачи (5)–(6) можно задать граничные условия первого или второго рода в некоторой совокупности узлов сетки.

В качестве границы возьмем границу «эталонного» куба  $K_{et}$  с центром в начале координат и стороной 200 км.

$$\Omega_n^{(S)}(x^{(s)}) \Big|_{x^{(s)} \in \Gamma K_{et}} = \Omega_{n,c}(x^{(s)}), \tag{7}$$

где  $\Omega_{n,c}(x^{(s)})$  – континуальное решение уравнения Лапласа;  $\Gamma K_{et}$  – граница эталонного куба.

Помимо задания граничных условий (7), можно рассмотреть и некоторый функционал качества, которому должен удовлетворять сеточный аналог фундаментального решения уравнения Лапласа. Мы выбрали следующий:

$$F[\Omega_3^{(S)}(x^{(s)})] = \sum_{x^{(s)} \in S_{+++}^3} \left( \frac{\Omega_3^{(S)}(x^{(s)}) - \Omega_{3,c}(x^{(s)})}{\Omega_{3,c}(x^{(s)})} \right)^2 = \min, \tag{8}$$

где  $\Omega_{3,c}(x^{(s)})$  – значения континуального фундаментального решения уравнения Лапласа в точках сеточной области. В (8)  $S_{+++}^3 = \{x^{(s)} : x_1^{(s)} \geq 0, x_2^{(s)} \geq 0, x_3^{(s)} \geq 0, x_1^{(s)} \leq x_2^{(s)} \leq x_3^{(s)}\}$ .

В силу симметрии сеточного фундаментального решения, достаточно найти его в этой области (т.е. в части первого координатного октанта):

$$\Omega_3^{(S)}(x^{(s)}) \equiv \Omega_3^{(S)}(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) = \Omega_3^{(S)}(|x_1^{(s)}|, |x_2^{(s)}|, |x_3^{(s)}|) = \Omega_3^{(S)}(|x_{i_1}^{(s)}|, |x_{i_2}^{(s)}|, |x_{i_3}^{(s)}|),$$

$$(i_1, i_2, i_3) \in S_3,$$

где  $S_3$  – группа перестановок трех индексов.

Таким образом, для определения гравитационного потенциала, создаваемого распределением масс в  $J_S$ , мы должны решить систему уравнений (5)–(7) или (5), (6), (8), а затем вычислить потенциал по формуле (4). Если речь идет об обратной линейной задаче гравиметрии, то ее можно сформулировать так.

**Найти** распределение масс в  $J_S$  по известному дискретному гравитационному потенциалу  $V_S(x^{(s)})$ , если сеточное фундаментальное решение удовлетворяет соотношениям (5), (6), (8) или (5)–(7). Гравитационный потенциал при этом представляется в виде суммы (5).

*Замечание.* Вместо гравитационного потенциала можно, безусловно, рассмотреть и его сеточные производные.

Фактически, при решении задач геофизики в рамках теории дискретного потенциала нет необходимости решать систему (2) (или, более подробно, (3)) с некоторыми граничными условиями. Принцип суперпозиции позволяет определять дискретные потенциалы по формуле (4) при условии, что найдено сеточное фундаментальное решение из (5)–(7) или (5), (6), (8). Нужно еще отметить, что, в отличие от континуального случая, поиск пространственного распределения значений некоторого элемента дискретного поля не является прямой задачей, даже если есть точная информация о величине и локализации источников, поскольку для значений сеточного фундаментального решения в узлах сети (см. (4)), нет аналитического выражения. Пока неясно, можно ли дать точную оценку приближения сеточного фундаментального решения к континуальному аналогу на бесконечности. Поэтому очень важно установить, при каких условиях и в каких пространственных областях указанное сеточное фундаментальное решение определяется однозначно.



Сеточное фундаментальное решение было вычислено А. Н. Левашовым в эталонном кубе с точностью  $\eta = 1 \times 10^{-8}$ .

Решение задач (2)–(3) или (5)–(7) можно искать с помощью метода прогонки. В указанном методе матрицы систем линейных алгебраических уравнений имеют трехдиагональный или блочно-трехдиагональный вид (если постановка рассматривается в трехмерном сеточном пространстве). Более того, если мы покажем, при каких условиях метод матричной прогонки применим, то тем самым мы конструктивно опишем способ нахождения единственного решения систем (2)–(3) или (5)–(6) при дополнительных граничных условиях.

Дифференциально-разностному оператору в (2) соответствует при решении краевых задач схема матричной прогонки [Самарский и Николаев, 1978] следующего вида:

$$\begin{aligned} -\mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{C}_k \mathbf{Y}_k + \mathbf{Y}_{k+1} &= \mathbf{F}_k, & 1 \leq k \leq N_3 - 1, \\ \mathbf{C}\mathbf{Y} &= (\Lambda \mathbf{y}_1, \Lambda \mathbf{y}_2, \dots, \Lambda \mathbf{y}_{N_2-1}), & \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_2-1}), \\ \mathbf{y}_j &= (y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{N_1-1,j}), & 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ \Lambda \mathbf{y}_j &= (\Lambda_1 y_{1,j}, \Lambda_1 y_{2,j}, \dots, \Lambda_1 y_{N_1-1,j}), \\ \Lambda_1 y_{i,j} &= 2y_{i,j} - C_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1; i,j} - C_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2; i,j}, & 1 \leq i \leq N_1 - 1; 1 \leq j \leq N_2 - 1. \end{aligned} \tag{9}$$

В (9) через  $\mathbf{Y}_k$  обозначен блочный вектор значений сеточной функции в слое, соответствующем значению третьей координаты  $x_3^{(S)} = kh_3, 1 \leq k \leq N_3 - 1$ . Правые части  $\mathbf{F}_k$  при изменении индекса  $1 \leq k \leq N_3 - 1$  – это значения некоторой сеточной функции в соответствующих точках в случае уравнения Пуассона и нули, если мы рассматриваем уравнение (6), константа  $C_3^2$  определяется в (2) (точнее говоря, это – квадрат  $C_3$ ). К уравнениям (8) необходимо добавить граничные условия с тем, чтобы возникла постановка краевой задачи. Мы рассмотрим граничные условия первого рода:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{F}_0, \mathbf{Y}_{N_3} = \mathbf{F}_{N_3}.$$

Необходимо сделать важное замечание: соотношение (3) – это конечно-разностный аналог уравнения Пуассона, заданный в неограниченной сеточной области, фактически – во всем сеточном пространстве. Для однозначной разрешимости такого рода уравнений, как мы подчеркивали выше, необходимо задать граничные условия, причем в тех точках, где это возможно сделать. Поэтому нужно определиться со свойствами сеточных областей, в которых мы в дальнейшем будем рассматривать краевые задачи для конечно-разностных аналогов уравнений Лапласа и Пуассона. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= (ih_1, jh_2, kh_3), 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1, 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\ \omega &= (ih_1, jh_2), 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1; \\ \gamma_3 &= (0, jh_2, kh_3) \cup (N_1, jh_2, kh_3) \cup (ih_1, 0, kh_3) \cup (ih_1, N_2, kh_3) \cup (ih_1, jh_2, 0) \cup (ih_1, jh_2, N_3), \\ &1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1, 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\ \gamma &= (0, jh_2) \cup (N_1, jh_2) \cup (ih_1, 0) \cup (ih_1, N_2), 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, мы задали равномерные сетки в трехмерном и двумерном пространствах  $(\omega_3, \omega)$ , а также в (10) обозначили границы соответствующих областей.

Формулы матричной прогонки имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1} \mathbf{B}_k, & k = 1, 2, \dots, N_3 - 1, & \alpha_1 = \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{B}_0; \\ \beta_{k+1} &= (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1} (\mathbf{F}_k + \mathbf{A}_k \beta_k), & k = 1, 2, \dots, N_3, & \beta_1 = \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{F}_0; \\ \mathbf{Y}_k &= \alpha_{k+1} \mathbf{Y}_{k+1} + \beta_{k+1}, & k = N_3 - 1, N_3 - 2, \dots, 0, & \mathbf{Y}_{N_3} = \beta_{N_3+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

причем алгоритм (11) корректен, если матрицы  $(\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1}$  не вырождены для  $k = 1, 2, \dots, N_3$ .

Матрицы  $S_k$  могут иметь разную размерность. В частности, если сеточная область представляет собой параллелепипед с несколькими вырезами (вырезы – также прямоугольные параллелепипеды), блочная матрица  $S_k$  выглядит так:

$$\left[ \begin{array}{l}
 1 \leq k \leq k_1 : N_1 \left\{ \begin{array}{l} D_n \quad -E_n \quad 0_n \quad \dots \\ \dots \qquad \qquad \qquad ; \\ 0_n \dots -E_n \quad D_n \end{array} \right. \\
 \\
 k_1 + 1 \leq k \leq k_2 : \left\{ \begin{array}{l} D_n \quad -E_n \quad \dots 0_n \\ -E_n \quad D_n - E_n \dots \\ 0_n \dots \qquad \qquad \qquad , 1 \leq i \leq I_1; \\ 0_{n \times n} \dots -G_n \quad F_n - G_{n'} \dots 0_{n' \times n}, i = I_1 + 1; \\ 0_{n' \times n} \dots -R_{n'} \quad T_{n'} \quad -R_{n'} \dots 0_{n' \times n}, I_1 + 2 \leq i \leq I_2 - 1; \\ 0_{n' \times n} \dots -G_{n'} \quad F_n \quad -G_n \dots 0_{n \times n}, i = I_2; \\ D_n \quad -E_n \quad 0_n \\ -E_n \quad D_n - E_n \dots \\ 0_n \dots \qquad \qquad \qquad , I_2 + 1 \leq i \leq N_1 \end{array} \right. \\
 \\
 k_2 \leq k \leq N_3 : N_1 \left\{ \begin{array}{l} D_n \quad -E_n \quad 0_n \quad \dots \\ \dots \qquad \qquad \qquad ; \\ 0_n \dots -E_n \quad D_n \end{array} \right. \\
 \\
 D_n = \left. \left( \begin{array}{cccc} 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 0 & \dots 0 \\ -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} \end{array} \right) \right\}_{n \times n}, E_n = \left. \left( \begin{array}{cccc} \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_3^2}{h_1^2} \end{array} \right) \right\}_{n \times n}, \\
 \\
 F_n = \left. \left( \begin{array}{cccc} 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 0 & \dots 0 \\ -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & \dots 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & 1 & \dots \\ & & & \dots \\ & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & \dots \end{array} \right) \right\}_{n \times n}, G_n = \left. \left( \begin{array}{cccc} \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ & & \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{h_3^2}{h_1^2} & & \dots \end{array} \right) \right\}_{n \times n} \quad (12) \\
 \\
 n' = N_2 - (J_2 - J_1); \quad n = N_2. \\
 \\
 T_{n'} = \left. \left( \begin{array}{cccc} 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 0 & \dots 0 \\ -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & \dots 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & 1 & \dots \\ & & & \dots \\ & -\frac{h_3^2}{h_2^2} & 2 + \frac{h_3^2}{h_2^2} + \frac{h_3^2}{h_1^2} & \dots \end{array} \right) \right\}_{n' \times n'}; \\
 \\
 R_{n'} = \left. \left( \begin{array}{cccc} \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ & & \dots & \dots \\ & \frac{h_3^2}{h_1^2} & 0 & \\ 0 & \frac{h_3^2}{h_1^2} & & \dots \end{array} \right) \right\}_{n' \times n'}.
 \end{array} \right]$$

В (12) учтено, что внутри сеточной области, состоящей из  $N_3$  горизонтальных слоев есть один «вырез» при  $k_1 \leq k \leq k_2$  (т.е. внутри большого параллелепипеда находится параллелепипед меньшего размера, который не содержит пунктов наблюдений). На каждом полном горизонтальном слое сеточной области имеется  $N_1$  «подслоев» вдоль оси  $OX$  (строк);  $N_2$  «подслоев» – вдоль оси  $OY$  (столбцов). В том месте, где находится лакуна, из строки удаляются  $J_2 - J_1$  столбцов. Лакуна находится в строках с номерами от  $I_1 + 1$  до  $I_2$ . В матрицах, обозначенных через  $F_n$  и  $G_n$  на диагонали стоят, соответственно,  $J_2 - J_1$  дробей  $\frac{h_3^2}{h_1^2}$  и нулей, в то время как в матрицах  $T_{n'}$  и  $R_{n'}$  – на диагонали стоят по две дроби и два нуля, которые отражают тот факт, что на границе прорези заданы условия Дирихле. Размерности матриц  $T_{n'}$  и  $R_{n'}$  равны  $n' \times n'$ . Таким образом, при каждом  $1 \leq k \leq N_3$  матрица  $C_k$  – это блочная трехдиагональная матрица размера  $N_1 \times N_1$  (по числу строк!), блоки которой – квадратные или прямоугольные матрицы, количество строк в которых равно числу элементов в соответствующей строке (т.е. совпадает с числом столбцов). Те строки, где не хватает элементов из-за наличия «прорези», имеют длину  $n' = N_2 - J_2 + J_1$ . Строкам с номерами  $I_1 + 1, \dots, I_2$  отвечают специфические матрицы,  $F_n$  и  $G_n$ , поскольку мы рассматриваем задачу Дирихле в параллелепипеде с вырезом.

Аналогичную (12) структуру имеют и матрицы (блочные трехдиагональные, состоящие из нулевых и единичных блоков разной размерности)  $A_k, B_k, k_1 + 1 \leq k \leq k_2$ .

$A_k$  «отбирает» элементы с предыдущего слоя, а  $B_k$  – с последующего. Поэтому блочные векторы  $Y_{k-1}$  и  $Y_{k+1}$  могут иметь различные размерности: либо  $N_1 \times N_2$ , либо  $(N_1 - I_2 + I_1) \times N_2 + n' \times (I_2 - I_1)$ .

В [Самарский и Николаев, 1978] показано, что при  $C_k = C, A_{N_3} = B_0 = 0, C_0 = C_{N_3} = E, B_k = A_k = E, 1 \leq k \leq N_3$ , а квадратная матрица  $C_k$  задана в (9), условия корректности алгоритма (11) принимают вид

$$\|C^{-1}\| = \max_l |\lambda_l(C^{-1})| = \frac{1}{\min_l |\lambda_l(C)|} \leq 0,5. \tag{13}$$

В (13) максимум и минимум берется по собственным значениям матрицы  $C^{-1}$  и  $C$  соответственно. Из определения матрицы  $C$  можно получить, что при замене  $\lambda_{l_s} = 2 + C_3^2 \lambda_{l_1, s}^{(1)} + C_3^2 \lambda_{l_2, s}^{(2)}, l_s = (l_1, s, l_2, s), s = 1, \dots, L$ , задача по поиску собственных значений  $\lambda_l$  для оператора

$$\begin{aligned} \Lambda_1 y_{i,j} &= 2y_{i,j} - C_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1; i,j} - C_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2; i,j} = \lambda_l y_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N_1^s - 1; 1 \leq j \leq N_2^s - 1, \\ y_{k,0} &= y_{k, N_2^s} = y_{0,j} = y_{N_1^s, j} = 0, \quad s = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

сводится к следующей задаче на собственные значения в многосвязной области [Gudkova et al., 2020]:

$$\begin{aligned} \Lambda y(x) + \lambda_l y(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega, \Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y, \\ y(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma; \\ y_{ij} &= y(x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, x_{2,j} = jh_2; \\ \Lambda_x \mu_{l_1}^{(1)} + \lambda_{l_1}^{(1)} \mu_{l_1}^{(1)} &= 0, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \\ \Lambda_y \mu_{l_2}^{(2)} + \lambda_{l_2}^{(2)} \mu_{l_2}^{(2)} &= 0, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ \mu_{l_1}^{(1)}(0) = \mu_{l_1}^{(1)}(N_1) = 0 &= \mu_{l_2}^{(2)}(0) = \mu_{l_2}^{(2)}(N_2), \\ \lambda_{l_\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{l_\alpha \pi}{2N_\alpha}\right) = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{l_\alpha \pi h_\alpha}{2d_\alpha}\right), l_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ \mu_{l_1}^{(1)}(i) &= \sqrt{\frac{2}{d_1}} \sin\left(\frac{l_1 \pi i}{N_1}\right), l_1 = 1, \dots, N_1 - 1; \\ \mu_{l_2}^{(2)}(j) &= \sqrt{\frac{2}{d_2}} \sin\left(\frac{l_2 \pi j}{N_2}\right), l_2 = 1, \dots, N_2 - 1; \\ y_{ij} &= \mu_l(i, j) = \mu_{l_1}^{(1)}(i) \cdot \mu_{l_2}^{(2)}(j), \\ \Lambda_x y_{ij} &= \frac{1}{h_1^2} [y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}], \Lambda_y y_{ij} = \frac{1}{h_2^2} [y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}]. \end{aligned} \tag{14}$$

Само же собственное значение равно

$$\lambda_l = 2 + C_3^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{l_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{15}$$

Для каждого из параллелепипедов (в частном случае – кубов), определяющих многосвязную область, собственные значения и собственные функции (14)–(15) имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{l_{\alpha,s}}^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{l_{\alpha,s}\pi}{2N_{\alpha,s}}\right) = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{l_{\alpha,s}\pi h_\alpha}{2d_{\alpha,s}}\right), l_{\alpha,s} = 1, 2, \dots, N_{\alpha,s} - 1, \\ \mu_{l_{1,s}}^{(1)}(i) &= \sqrt{\frac{2}{d_{1,s}}} \sin\left(\frac{l_{1,s}\pi i}{N_1}\right), l_{1,s} = 1, \dots, N_{1,s} - 1; \\ \mu_{l_{2,s}}^{(2)}(j) &= \sqrt{\frac{2}{d_{2,s}}} \sin\left(\frac{l_{2,s}\pi j}{N_{2,s}}\right), l_{2,s} = 1, \dots, N_{2,s} - 1; \quad s = 1, \dots, L. \end{aligned} \tag{16}$$

Поэтому для всей многосвязной области собственными функциями и собственными значениями будут только те объекты (16), для которых выполняются соотношения:  $\frac{l_{\alpha,s}}{N_{\alpha,s}} = \text{const}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $s = 1, \dots, L$ . Например, если отношение стороны маленького куба к стороне большого (вмещающего) куба равно 1/3, то собственными функциями будут только те, у которых  $\frac{l_{\alpha,s}}{N_{\alpha,s}} = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $s = 1, \dots, L$ . Заметим, что шаги сетки  $h_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ , для многосвязной области во всех компонентах связности одинаковые для данного направления.

В (16) через  $y(x)$  обозначена сеточная функция двух аргументов, определенная на двумерной сетке  $x = (x_1, x_2) \in \omega$  (см. (10)). При этом в каждом слое  $x_3 = kh_3, 1 \leq k \leq N_3$ , рассматривается «своя» задача на собственные значения конечно-разностного оператора вида (14). Из (16) становится ясно, что  $\lambda_l > 2$ , поэтому алгоритм матричной прогонки является для задачи (5)–(7) корректным, и мы можем утверждать, что справедлива следующая

**Теорема 1.** *Фундаментальное решение сеточного аналога уравнения Лапласа в трехмерном случае определяется условиями (5)–(7) в многосвязной области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с вырезами, однозначно.*

Подчеркнем, что корректность алгоритма матричной прогонки означает, что решение задачи (5)–(7) не только существует, но и единственно – следовательно, обоснованным становится алгоритм вычисления дискретного потенциала по формуле (4) (прямая задача гравиметрии). В свою очередь, процесс интерпретации данных о таком потенциале приобретает характер четко определенной процедуры: фундаментальное решение в формуле (4) принимает известные значения в точках сети наблюдений, никакого произвола (связанного с выбором конечно-разностной аппроксимации оператора Лапласа) больше нет.

Как мы указывали выше, можно найти значения сеточного фундаментального решения оператора Лапласа в некоторой эталонной области, а затем с помощью линейной замены переменных перевести рассматриваемый полигон внутрь этого эталона. После того как мы убедимся в том, что все значения сеточного фундаментального решения в (8) нам известны, можно сформулировать обратную линейную задачу гравиметрии по поиску сеточных масс.

Точнее, получим следующие условия: найти распределение  $m_S(\xi^{(S)}), \xi^{(S)} \in J_S$ , если в некоторой сеточной области  $D_S$  известны значения дискретного потенциала  $V_S(x^{(S)}), x^{(S)} \in D_S$ , и выполняются соотношения (4).

### 3. Результаты математического эксперимента

Предлагаемый в статье подход к решению обратных линейных и нелинейных задач геофизики был апробирован на модельных примерах. Мы решали задачу по определению сеточных масс в заданных узлах сети наблюдений, при условии, что сеточное фундаментальное решение определялось в одном большом эталонном кубе (со стороной 200 км). Области же задания узлов наблюдений были «многосвязными»: они располагались либо в верхнем, либо в нижнем полупространстве и представляли собой прямоугольные параллелепипеды с вырезанными частями. Если вырезы находились в верхнем полупространстве (условно говоря, над землей), то такая постановка может соответствовать задаче с пробелами в наборах данных. Если же вырезанные области содержали носители масс, то можно говорить об определении поля «под землей», вблизи источников. Подчеркнем, в данной работе метод матричной прогонки применялся для поиска сеточного фундаментального решения в «целом» кубе. Теорема 1 гарантирует, что значения дискретного потенциала однозначно восстанавливаются в многосвязной области при известных распределениях источников и значениях потенциала на границах всех параллелепипедов, входящих в определение многосвязной области. В дальнейшем мы планируем провести математический эксперимент по решению задач в некоторых эталонных многосвязных областях.

В модельном примере №1 аномальное гравитационное поле создавалось набором из четырнадцати прямых призм, нижние основания которых расположены на глубине 3 км под землей, а высоты призм варьировались от 400 метров до 1,1 километров. Плотность породы в призмах чередовалась: она составила  $0,7 \text{ г/см}^3$  и  $-0,5 \text{ г/см}^3$ , соответственно. Участок съемки имел размеры  $250 \times 250$  км, рельеф местности выбирался ровным (перепад высот не превышал 250 метров). В поперечнике призма были приблизительно 26 км. Поле призм, как и в работах [Stepanova and Kolotov, 2024a, b], вычислялось непосредственно, как для континуального аналога, а также аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на нескольких горизонтальных плоскостях (от 2 до 10), залегающих на глубинах от 100 метров до 1 км. Карта изолиний гравитационного поля призм приведена на рис. 1. Мы решили вариационную задачу (6)–(7), (9) в эталонном кубе и нашли значения дискретного потенциала в точках многосвязных областей (включая границу) по (4). Помимо этого, мы посчитали значения потенциала на нескольких горизонтальных плоскостях в верхнем полупространстве, используя решение обратной задачи, полученное с помощью метода модифицированных S-аппроксимаций (для контроля). В качестве входной информации при применении метода S-аппроксимаций, как было указано выше, мы брали значения вертикальной производной потенциала в точках некоторого плавного рельефа. Значения самого потенциала не могут быть использованы для нахождения эквивалентного по внешнему полю распределения масс на горизонтальных плоскостях (в силу особенностей методики: интегралы в методе S-аппроксимаций расходятся при таком выборе ядра).

Во втором модельном примере участок съемки имел размеры  $125 \times 125$  км. Призм было три, плотность породы одной призме была равна  $-1,5 \text{ г/см}^3$ , в двух других  $-1,2 \text{ г/см}^3$  (со знаком «+»). Поперечники призм были приблизительно равны 30 км. На рис. 2 показано гравитационное поле, создаваемое распределением масс во втором модельном примере.

Поля призм сначала были просуммированы и рассмотрены нами на большем полигоне. Первый этап интерпретации заключался в том, чтобы с помощью метода линейных интегральных представлений (модифицированных S-аппроксимаций) разделить поля, создаваемые каждой из групп призм в отдельности. Таким образом, мы получили два блока данных. В каждом из блоков было по 12000 точек.

На втором этапе интерпретации данных мы разделили поля, создаваемые каждой из призм в отдельности, также с помощью метода линейных интегральных представлений [Раевский и Степанова, 2015; Gudkova et al., 2020; Stepanova and Strakhov, 2002a, b]. Таким образом, блоки у нас представляли собой те подмножества данных

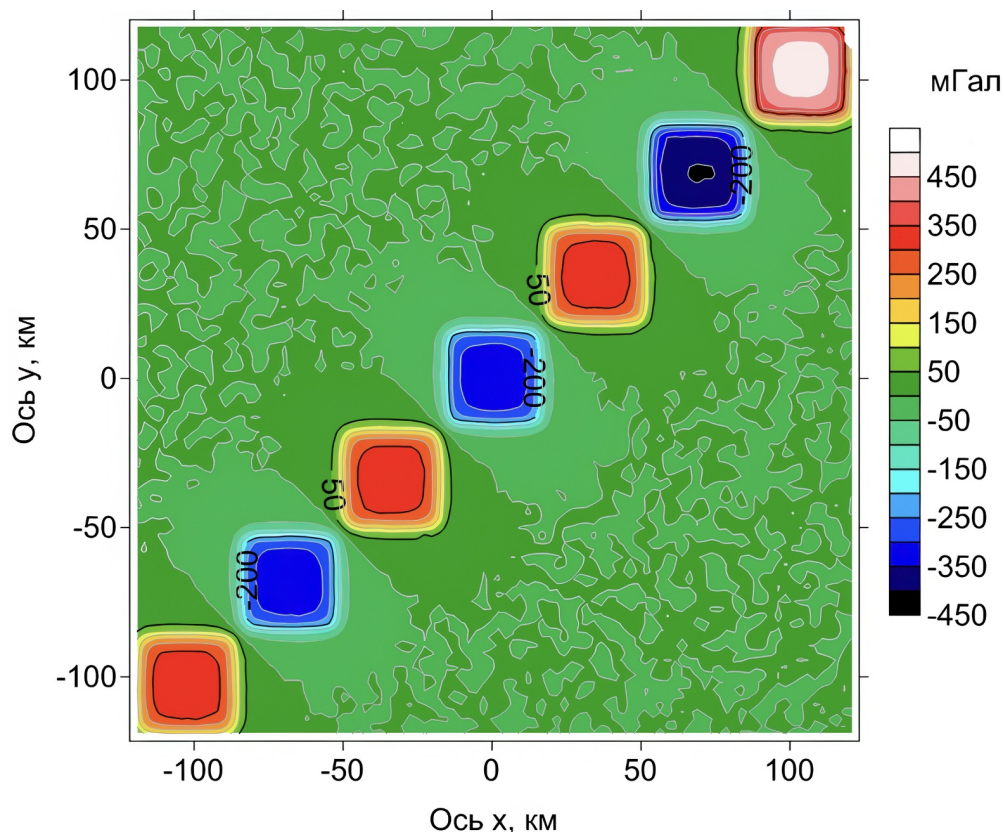


Рис. 1. Гравитационное поле в модельном примере №1.  $N = 12000$ .

из всего ансамбля, которые соответствовали конкретной призме. Затем мы как бы окружили каждую призму параллелепипедом, стороны которого были больше сторон призмы на 200–300 метров (в зависимости от расстояния между призмами и их высоты). В кубе с центром в начале координат и стороной 200 км мы выделили ряд многосвязных областей. При этом поля призм, подвергшихся удалению из ансамбля, также исключались из вектора правой части СЛАУ, к которой сводилось решение обратной задачи для уравнения (4).

Многосвязные области строились так: в верхнем полупространстве, точнее говоря, в пересечении куба со стороной 300 с центром в начале координат и верхнего полупространства, мы «вырезали» параллелепипеды, являющиеся отражением охватывающих прямые призмы аналогов. Затем мы поставили задачу для получившейся области. В нижнем полупространстве мы поставили такую же задачу для нижней части эталонного куба с вырезанными параллелепипедами. Мы вырезали в первом примере 3, 5 и 14 призм. Во втором – каждую по отдельности и все сразу. Точность определения сеточных масс  $\eta = \frac{\|m_S(\xi^{(S)}) - m_{calc}(\xi^{(S)})\|_{E(J_S)}}{\|m_S(\xi^{(S)})\|_{E(J_S)}}$ , в первом модельном примере составила:

1. при удалении трех и пяти призм в верхнем полупространстве –  $\eta = 10^{-6}$ ;
2. при удалении всех призм –  $\eta = 2,1 \times 10^{-3}$ .

Здесь  $m_S(\xi^{(S)})$  – заданные значения масс, а  $m_{calc}(\xi^{(S)})$  – найденные из решения системы (5), при условии, что сеточное фундаментальное решение удовлетворяет в эталонном кубе (6)–(8).

Для второго модельного примера мы получили следующие значения относительной точности восстановления сеточных масс:

1. при удалении одной призмы –  $\eta = 10^{-5}$ ;
2. при удалении всех трех призм –  $\eta = 4,6 \times 10^{-4}$ .

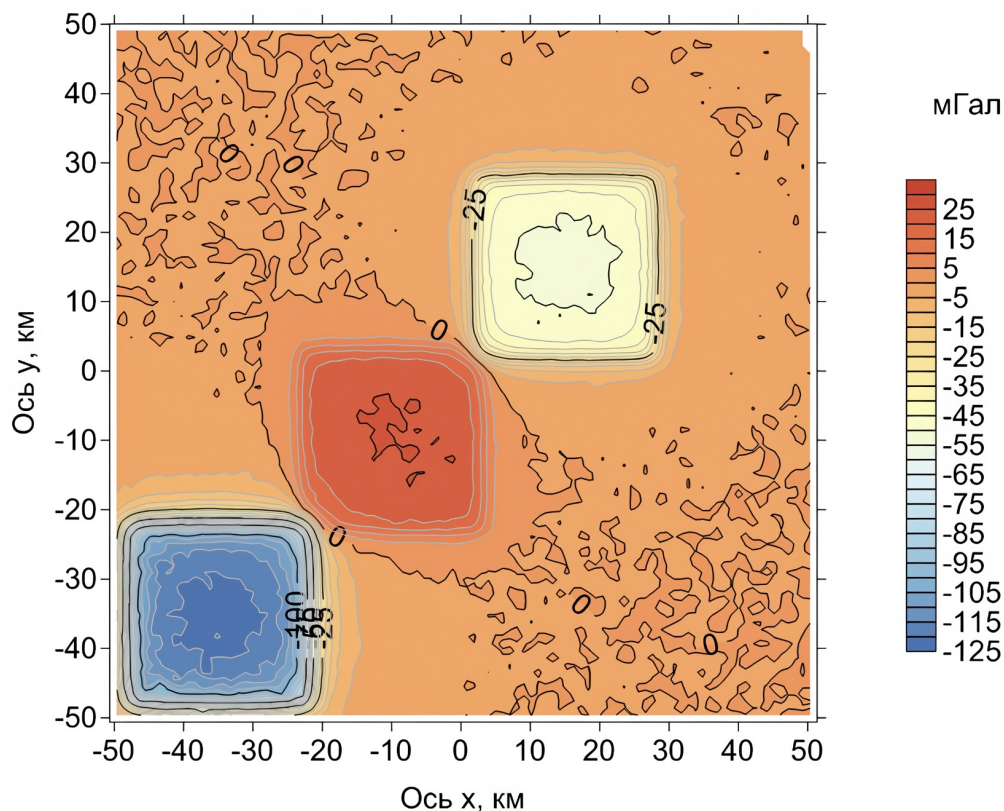


Рис. 2. Карта изолиний гравитационного поля в модельном примере №2.  $N = 12000$ .

Понижение точности можно объяснить тем, что уменьшается контрастность поля, если рассматриваются только те области, где имеет место выход на нормальное поле.

Третий пример применения описанной двухэтапной интерпретации данных в рамках комбинаторного подхода и теории дискретного потенциала можно охарактеризовать как полусинтетический. «Сырые» данные магнитного поля Марса можно найти на сайте Системы Планетных данных (<http://pds-geosciences.wustl.edu>). Мы взяли массив данных о магнитном поле Марса и перевели сферические координаты в декартовы и преобразовали последние так, чтобы полигон в своем сечении в плоскости  $XOY$  совпал с квадратом  $-130 \times 130$  км (карта изолиний радиальной компоненты магнитного поля Марса приводится на рис. 3). Затем для значений радиальной компоненты магнитного поля мы нашли эквивалентное по внешнему полю распределение сеточных источников (магнитных моментов) в эталонном кубе. Подчеркнем, мы построили метрологическую аппроксимацию компоненты магнитного поля, поскольку априорной информации об источниках реального поля у нас нет. Многосвязные области, в которых рассматривались постановки (6)–(8), были теми же самыми, что и для двух предыдущих модельных примеров. Для первого модельного полигона мы получили относительную точность определения сеточных магнитных моментов  $\eta = 10^{-6}$ . Для второго полигона относительная точность восстановления сеточных магнитных моментов в узлах сети наблюдений, попадающих в призмы, оказалась ниже –  $\eta = 3,4 \times 10^{-5}$ . Это связано с тем, что во втором случае мы вырезали больший «кусочек» из области задания элемента поля.

Как мы уже отмечали в [Раевский и Степанова, 2015; Stepanova and Strakhov, 2002a, b], распределение источников, полученное в результате решения нами вариационной задачи полностью соответствует карте изолиний поля. Таким образом, наш подход позволяет восстановить «изображение» источников по данным о физическом

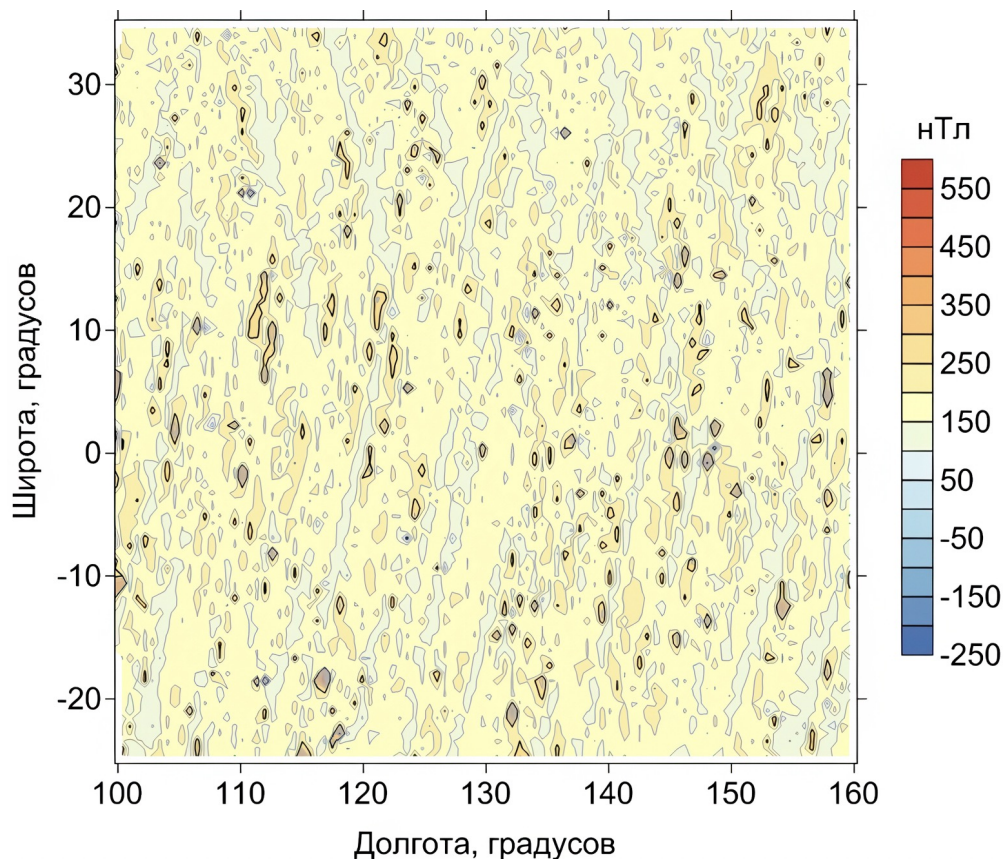


Рис. 3. Магнитное поле Марса на высоте  $h = 150$  км от поверхности планеты.  $N = 12\,000$ .

поле, создаваемое ими на некотором рельефе. Относительная точность аппроксимации аномального поля составила  $\Delta = 10^{-10}$ . Под относительной точностью аппроксимации  $\Delta$  мы понимаем следующее:  $\Delta = \frac{\|Az - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E}$ , здесь обозначения имеют тот же смысл, что в (13),  $\|f_\delta\|_E$  – евклидова норма вектора.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.


### Список литературы

- Арсанукаев З. З. Вычисление пространственных элементов аномальных полей с использованием методов теории дискретных гравитационных полей // *Физика Земли*. — 2004. — № 11. — С. 47–69. — EDN: [OXLZJV](#).
- Раевский Д. Н., Степанова И. Э. О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // *Физика Земли*. — 2015. — № 2. — С. 55–66. — DOI: [10.7868/S000233371502009X](#).
- Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — Москва : Наука, 1978. — 592 с.
- Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — Москва : Наука, 1977. — 320 с.
- Страхов В. Н. Об эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности масс // *Доклады АН СССР*. — 1977. — Т. 236, № 2. — С. 329–331.
- Страхов В. Н., Степанова И. Э., Гричук Л. В. Теория дискретного гравитационного потенциала и ее использование в гравиметрии // «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей», Труды международной конференции. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 1996. — С. 49–71.
- Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В. и др. Численные методы решения некорректных задач. — Москва : Наука, 1990. — 230 с.
- Gudkova T. V., Stepanova I. E., Batov A. V. Density Anomalies in Subsurface Layers of Mars: Model Estimates for the Site of the InSight Mission Seismometer // *Solar System Research*. — 2020. — Vol. 54, no. 1. — P. 15–19. — DOI: [10.1134/S0038094620010037](#).



- Stepanova I. E., Kolotov I. I. Solution of the Interpretation Tomography Problem in Geophysics under the Linear Integral Representation Method and Theories of Discrete Gravity and the Magnetic Potential // *Doklady Earth Sciences*. — 2024a. — Vol. 516, no. 1. — P. 835–843. — DOI: [10.1134/s1028334x24600907](https://doi.org/10.1134/s1028334x24600907).
- Stepanova I. E., Kolotov I. I. The Combinatorial-Variational Approach to Solving Linear and Nonlinear Inverse Problems in Geophysics // *Doklady Earth Sciences*. — 2024b. — Vol. 518, no. 1. — P. 1534–1545. — DOI: [10.1134/S1028334X24602499](https://doi.org/10.1134/S1028334X24602499).
- Stepanova I. E., Strakhov V. N. Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2002a. — Vol. 38, no. 7. — P. 535–544. — EDN: [LHCHST](https://edn.ras.ru/LHCHST).
- Stepanova I. E., Strakhov V. N. The S-approximation method and its application to gravity problems // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2002b. — Vol. 38, no. 2. — P. 91–107. — EDN: [LHLKQT](https://edn.ras.ru/LHLKQT).

# COMBINATORIC-VARIATIONAL APPROACH TO SOLVING INVERSE PROBLEMS IN GEOPHYSICS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE DISCRETE POTENTIAL THEORY. COMPLEX GEOLOGICAL ENVIRONMENT

I. E. Stepanova<sup>\*\*1</sup>, I. I. Kolotov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Schmidt Institute of Physics of the Earth, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

**\*\*Correspondence to:** Inna Stepanova, tet@ifz.ru.

Variational-combinatoric approach is used when solving linear and nonlinear inverse problems of geophysics within the framework of discrete potential. The acquired data about physical fields and their sources are of discrete character. Combinatoric methods of discrete mathematics allow us to organize some selective choice of the information on the physical field elements. Analytical approximations are built only by means of verified data which can be recognized as useful signal, not as an arbitrary or systematic noise.

**Keywords:** discrete potential, combinatoric approach, geological structure, integral representation.

Received: 9 October 2024

Accepted: 17 February 2025

Published: 24 March 2025



© 2025. The Authors.

**Citation:** Stepanova, I. E., I. I. Kolotov (2025), Combinatoric-Variational Approach to Solving Inverse Problems in Geophysics Within the Framework of the Discrete Potential Theory. Complex Geological Environment, *Russian Journal of Earth Sciences*, 25, ES3002, <https://doi.org/10.2205/2025ES001000>, EDN: QYNSZG

## References

- Arsanukaev Z. Z. Calculation of spatial elements of anomalous fields based on the theory of discrete gravitational fields // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2004. — Vol. 40, no. 11. — P. 935–955. — EDN: GUVETJ.
- Gudkova T. V., Stepanova I. E., Batov A. V. Density Anomalies in Subsurface Layers of Mars: Model Estimates for the Site of the InSight Mission Seismometer // *Solar System Research*. — 2020. — Vol. 54, no. 1. — P. 15–19. — DOI: [10.1134/S0038094620010037](https://doi.org/10.1134/S0038094620010037).
- Raevsky D. N., Stepanova I. E. On the solution of inverse problems of gravimetry by the modified method of S-approximations // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2015. — Vol. 51, no. 2. — P. 207–218. — DOI: [10.1134/s1069351315020081](https://doi.org/10.1134/s1069351315020081).
- Sachkov V. N. Combinatorial methods of discrete mathematics. — Moscow : Nauka, 1977. — P. 320. — (In Russian).
- Samarsky A. A., Nikolaev E. S. Methods for solving grid equations. — Moscow : Nauka, 1978. — P. 592. — (In Russian).
- Stepanova I. E., Kolotov I. I. Solution of the Interpretation Tomography Problem in Geophysics under the Linear Integral Representation Method and Theories of Discrete Gravity and the Magnetic Potential // *Doklady Earth Sciences*. — 2024a. — Vol. 516, no. 1. — P. 835–843. — DOI: [10.1134/s1028334x24600907](https://doi.org/10.1134/s1028334x24600907).
- Stepanova I. E., Kolotov I. I. The Combinatorial-Variational Approach to Solving Linear and Nonlinear Inverse Problems in Geophysics // *Doklady Earth Sciences*. — 2024b. — Vol. 518, no. 1. — P. 1534–1545. — DOI: [10.1134/S1028334X24602499](https://doi.org/10.1134/S1028334X24602499).
- Stepanova I. E., Strakhov V. N. Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2002a. — Vol. 38, no. 7. — P. 535–544. — EDN: LHCHST.
- Stepanova I. E., Strakhov V. N. The S-approximation method and its application to gravity problems // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2002b. — Vol. 38, no. 2. — P. 91–107. — EDN: LHLKQT.
- Strakhov V. N. On the equivalence in the inverse problem of gravimetry at variable mass density // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. — 1977. — Vol. 236, no. 2. — P. 329–331. — (In Russian).

- Strakhov V. N., Stepanova I. E., Grichuk L. V. Theory of Discrete Gravitational Potential and Its Use in Gravimetry // «Theoretical and Practical Issues of Geological Interpretation of Gravitational, Magnetic and Electric Fields», Proceedings of the International Conference. — Voronezh : Voronezh State University, 1996. — P. 49–71. — (In Russian).
- Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., et al. Numerical methods for solving ill-posed problems. — Moscow : Nauka, 1990. — P. 230. — (In Russian).