

ЭВОЛЮЦИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ В БАРОКЛИННОМ ФОНОВОМ ПОТОКЕ

Д. А. Арутюнян^{1*} , В. В. Жмур^{1,2,3} 

¹Московский физико-технический университет, Москва, Россия

²Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

³Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

* **Контакт:** Давид Арменович Арутюнян, agutyunyan.da@phystech.su

В работе рассматривается задача о поведении круглого в плане эллипсоидального вихря океана во внешнем бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. Установлено, что время жизни вихря при фиксированных начальных условиях для его параметров сильно зависит от параметра внешнего сдвига. В зависимости от времени жизни вихря, изображающая точка пространства внешних параметров может находиться в одной из трех зон: (1) зона выживания, когда время жизни вихря стремится к бесконечности, (2) зона конечного времени жизни вихря и (3) зона вытягивания, где время жизни вихря стремится к нулю. При некотором значении сдвига соответствующее границе между зонами (1) и (2), характеризуется как критическое. Критический сдвиг, в свою очередь, зависит от начальных геометрических параметров ядра вихря. В работе также исследуется эволюция энергетики вихря. Показано, что при вытягивании вихря бароклинным потоком убывает полная механическая энергия как ядра, так и всего вихря, а также что квазигеострофический баланс остаётся справедливым для всех трех режимов поведения.

Ключевые слова: эллипсоидальный вихрь, время жизни вихря, критический сдвиг, энергия вихря, число Россби.

Цитирование: Арутюнян Д. А. и Жмур В. В. Эволюция гидродинамических параметров эллипсоидального вихря в бароклинном фоновом потоке // Russian Journal of Earth Sciences. — 2025. — Т. 25. — ES5002. — DOI: 10.2205/2025es001047 — EDN: FQGPCO

Введение

Аналитическое исследование динамики распределённых вихрей началось с работы Кирхгофа, в которой он представил точное решение задачи о поведении равнозавихрённой эллиптической области в идеальной жидкости, находящейся в состоянии покоя на бесконечности [Kirchhoff, 1876]. Чаплыгин [Чаплыгин, 1899] изучал поведение вихря Кирхгофа в течении со сдвигом, однако наиболее полное описание режимов его эволюции в равнозавихрённых потоках было представлено японским исследователем Кида [Kida, 1981]. Исследование Кида стало важной вехой, послужившей стимулом для дальнейшего развития теории вихрей в рамках плоской гидродинамики. В работе [Polvani and Flierl, 1986] была разработана теория, которая обобщает вихрь Кирхгофа. В дальнейшем была развита теория объёмных 3D эллипсоидальных вихрей [Жмур, 2011; Жмур и Панкратов, 1989; Жмур и Щепеткин, 1991; Meacham et al., 1994], основанная на квазигеострофическом приближении. В рамках этой теории изучались трёхмерные эллипсоидальные вихри с тремя в общем случае различными размерами трёх полуосей. Было установлено, что в баротропных горизонтальных равнозавихрённых течениях 3D-вихри могут находиться в одном из трёх режимов: вращения, колебания или неограниченного вытягивания [Жмур и др., 2023b]. Исследование эллипсоидальных вихрей во внешних потоках имело продолжение в работах [Dritschel et al., 2004; McKiver and

<https://elibrary.ru/FQGPCO>

Получено: 13 мая 2025 г.

Принято: 15 июля 2025 г.

Опубликовано: 26 августа 2025 г.



© 2025. Коллектив авторов.

[Dritschel, 2003, 2006, 2016]. Поведение эллипсоидальных 2D- и 3D-вихрей Кирхгофа в фоновых баротропных течениях оказалось качественно похожим. В работе [Жмур и Арутюнян, 2023] была исследована эволюция полной механической энергии вихря во внешнем баротропном потоке. Оказалось, что при вытягивании эллипсоидального вихря его полная энергия монотонно убывает, при этом потерянная часть энергии возвращается обратно в течение, т.е. реализуется обратный энергетический каскад. Это позволило объяснить интенсификацию течений в присутствии в них деформирующихся вихрей. Особо следует отметить работу [Meacham *et al.*, 1994]. В ней сформулирована задача об эволюции произвольно ориентированного эллипсоидального вихря под действием равнозавихрённых фоновых течений. Здесь была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно геометрических параметров вихря – длин полуосей и углов ориентации во внешних потоках общего вида. Однако в силу математических и технических сложностей системы в этих работах не производилось исследование режимов поведения вихря в указанных потоках. В работе [Арутюнян и Жмур, 2025] была исследована вышеупомянутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющая из себя уравнение эволюции границы эллипсоидального вихря в бароклиновых фоновых течениях при большом наборе начальных и внешних условий. В результате были получены режимы поведения вихря в горизонтальном бароклиновом потоке с вертикальным сдвигом. Выделены три режима: (1) режим выживания (при котором размеры вихревого образования неограниченное время остаются конечными, а его ориентация имеет сложное поведение в пространстве), (2) режим конечного времени жизни (на конечном временном отрезке вихрь ведёт себя как при режиме выживания, а затем неограниченно вытягивается вдоль течения) и (3) режим неограниченного вытягивания (вихрь вытягивается по горизонтали фоновым течением с самого начала его эволюции). Неограниченное вытягивание вихревого ядра трактуется как подавление вихря течением. В настоящей работе исследуется эволюция эллипсоидального первоначально круглого в плане вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом. Основное внимание уделено оценкам времени жизни вихря в режиме конечного времени жизни, выявлению свойств критических значений параметра сдвига фонового течения, разделяющих режимы (1) выживания и (2) конечного времени жизни, а также эволюции энергии вихря во всех упомянутых выше режимах поведения в бароклиновом фоновом течении.

Математическая модель задачи

Рассматривается стратифицированная вращающаяся жидкость в квазигеострофическом приближении (при малых числах Россби $Ro \ll 1$) и в приближении f -плоскости. В этом случае функция тока $\psi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению [Жмур, 2011; Meacham *et al.*, 1994]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J_h \left(\psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где x, y – горизонтальные оси системы координат, z – вертикальная ось, $J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y}$ и $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – операторы Якоби и Лапласа по горизонтальным координатам; $N(z)$ – частота Брента – Ваясяля.

Через функцию тока можем вычислить остальные гидродинамические характеристики, такие как поле скорости (u, v, w) :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{f_0}{N^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J_h \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right],$$

где вертикальная компонента скорости w имеет порядок числа Россби Ro .

Из уравнения (1) получаем, что потенциальная завихрённость

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

с точностью порядка $O(Ro)$ является лагранжевым инвариантом и переносится вместе с жидкостью частицей. Пересядя в растянутую по вертикали систему координат, где $\tilde{z} = \frac{N}{f} z$, примем ступенчатое распределение относительной потенциальной завихрённости

$$\Delta\psi = \begin{cases} \sigma, & \text{при } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ 0, & \text{при } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases},$$

где σ – разница между завихрённостями ядра и внешнего потока. Решение данной задачи полностью аналогично с решением задачи о гравитационном потенциале однородного по плотности эллипсоида и изложено в работах [Жмур, 2011; Жмур и Панкратов, 1989], см. также общий подход в [Тихонов и Самарский, 1977]. Для функции тока внутри вихревого ядра предложено решение

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y_1, z_1, t) = & \\ -\frac{1}{4}\sigma abc \int_0^{\infty} & \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2 + m} - \frac{y_1^2}{b^2 + m} - \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2 + m}\right) \frac{dm}{\sqrt{(a^2 + m)(b^2 + m)(\tilde{c}^2 + m)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

где (x_1, y_1, z_1) – оси главных направлений эллипсоида, (a, b, \tilde{c}) – полуоси ядра. Уравнение поверхности вихревого ядра наиболее просто записывается в системе координат (x_1, y_1, z_1)

$$F(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2} - 1 = 0. \quad (3)$$

В [Арутюнян и Жмур, 2025; Meacham et al., 1994] с учётом решения (2), кинематического условия на границе ядра (3) и условия сохранения объёма эллипсоида (ядра вихря) в потоке с вертикальным сдвигом Γ получена система дифференциальных уравнений относительно геометрических параметров вихря:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & -\Gamma \sin \theta [\sin 2\psi \cdot \sin \varphi - \cos \theta \cos 2\psi \cos \varphi] \cdot \varepsilon, \\ \dot{K} = & \frac{3}{4} \Gamma \sin 2\theta \cos \varphi K, \\ \dot{\theta} = & \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2\psi (\omega_2 - \omega_1) \\ + \Gamma \left(& \left(\sin^2 \theta - K^2 \cos 2\theta \left(\frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) \right) \cos \varphi \right. \\ & \left. + \frac{K^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{1}{\varepsilon - K^2} \right) \cos \theta \sin 2\psi \sin \varphi \right), \\ \dot{\varphi} = & \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \cos 2\psi \\ + \Gamma \left(& \frac{K^2}{\sin \theta} \right) \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) \sin \varphi \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{1}{\varepsilon - K^2} \right) \cos 2\theta \sin 2\psi \cos \varphi \right], \\ \dot{\psi} = & \cos \theta \left[\omega_3 - \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \cos 2\psi \right] \\ - \frac{\Gamma}{\sin \theta} \cdot & \left[\left[K^2 \cos^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) - \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \psi - \varepsilon^2 \sin^2 \psi}{1 - \varepsilon^2} \right] \sin \varphi \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{K^2}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{K^2}{\varepsilon - K^2} \right) \cos 2\theta + \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \sin^2 \theta \right] \cos \theta \sin 2\psi \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Γ – параметр сдвига, $\varepsilon = \frac{a}{b}$ – безразмерный параметр вытянутости ядра, $K = \frac{c}{\sqrt{ab}}$ – безразмерный параметр сплюснутости ядра, φ, θ, ψ – углы Эйлера ориентации ядра вихря в пространстве: φ – угол прецессии, θ – угол нутации, ψ – угол собственного вращения, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – угловые скорости вращения ядра вокруг трех полуосей сопутствующей системы координат. Они задаются следующим образом [Жмур, 2011; Жмур и Щепеткин, 1991; Meacham *et al.*, 1994]

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} K \sigma \int_0^\infty \frac{mdm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3(K^2 + m)^3}}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} K \sigma \int_0^\infty \frac{mdm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}}, \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} K \sigma \int_0^\infty \frac{mdm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3(\varepsilon^{-1} + m)^3(K^2 + m)}}.\end{aligned}\quad (5)$$

В (4) производные вычисляются по размерному времени t : $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Для удобства, разделив обе части (4) на завихрённость ядра σ , получим безразмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с безразмерным параметром сдвига Γ/σ . Тогда удобно производную вычислить тоже по безразмерному времени σt : $\dot{a} = \frac{da}{d(\sigma t)}$. Далее будем использовать только безразмерные параметры.

Эволюция вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом

Рассмотрим систему (4) при начальных условиях

$$\varepsilon(0) = 1, \quad K(0) = 0,25, \quad \theta(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (6)$$

При таких начальных значениях ядро вихря будет иметь круглую в плане форму и ориентировано вдоль внешнего течения так, что плоскость (x_1, y_1) будет горизонтальной, а ось z_1 – вертикальной.

Система (4) решалась численно методом Рунге – Кутты второго и третьего порядка с адаптивным шагом по времени. В ходе численного решения было установлено, что эволюция геометрических параметров ядра сильно зависит от параметра сдвига Γ/σ . Рассмотрим безразмерное время T , начиная с которого ядро начинает квазимонотонно вытягиваться. Такое время характеризуется как время жизни вихря. Однако существуют значения сдвигов, для которых горизонтальный параметр ядра бесконечно осциллирует около начального (или близкого к начальному) значения. Такое поведение вихря характеризуется колебательно-вращательным режимом [Жмур и др., 2023а, б], а время жизни вихря формально будет равно бесконечности. Очевидно, что такой режим соответствует течениям со слабым сдвигом. Как уже отмечалось, в зависимости от сдвига течения, при определённом начальном условии, вихрь может вести себя по-разному: находиться в зоне выживания, в зоне конечного времени жизни или в зоне неограниченного вытягивания. На [рис. 1](#) представлена эволюция параметров вихря в трёх различных зонах.

Как уже отмечалось, время жизни вихря – это минимальное время, после которого ядро начинает вытягиваться в нить, при этом его вертикальный размер схлопывается до близких к нулю значений: параметр сплюснутости K квазимонотонно убывает до нуля, как показано на [рис. 2](#).

Минимальное значение сдвига, при котором вихрь переходит в колебательно-вращательный режим, назовём критическим сдвигом. На [рис. 3](#) представлена зависимость времени жизни вихря от величины безразмерного сдвига при начальных условиях (6).

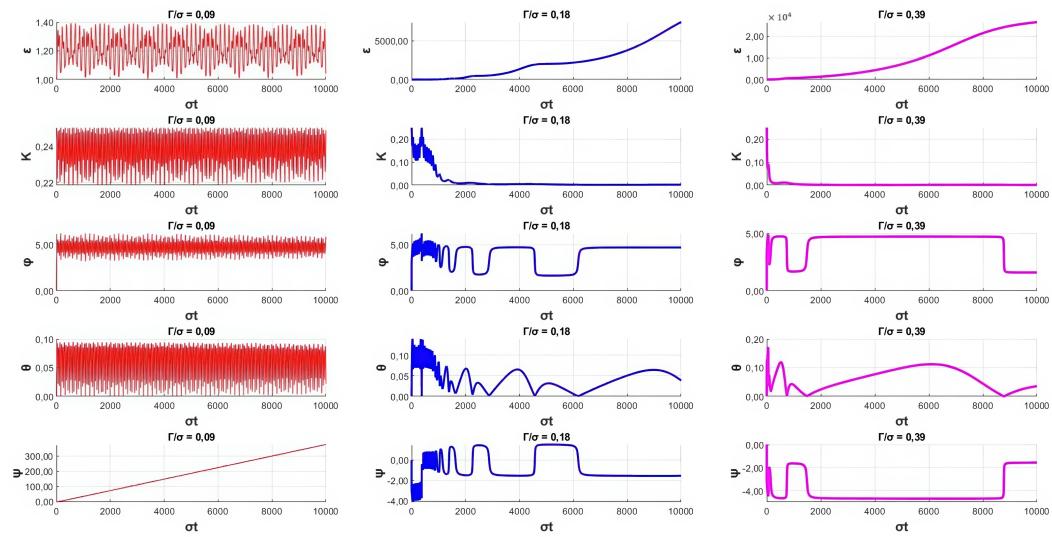


Рис. 1. Зависимости параметров ядра вихря $\epsilon(\sigma t)$, $K(\sigma t)$, $\phi(\sigma t)$, $\theta(\sigma t)$, $\psi(\sigma t)$ при начальных условиях (6) – последовательно, сверху вниз в трех режимах: при $\Gamma/\sigma = 0,09$ – режим выживания – слева (красные линии); при $\Gamma/\sigma = 0,18$ – режим конечного времени жизни – в центре (синие линии); при $\Gamma/\sigma = 0,39$ – режим вытягивания – справа (фиолетовые линии).

Из рис. 3 следует, что функция времени жизни вихря квазисимметрична относительно знака параметра внешнего сдвига. Действительно, когда $\theta(0) = 0$, то есть одна из главных осей вихря строго вертикальна, поток с вертикальным сдвигом воздействует на вихрь симметричным образом. Для начального условия (6) получаем значение критического сдвига $|\Gamma/\sigma| = 0,17$, и время жизни вихря будет стремиться к бесконечности при $|\Gamma/\sigma| \leq 0,17$. Рассмотрим теперь зависимость критического сдвига от начального параметра сплюснутости. На рис. 4 приведён соответствующий график зависимости.

Рассмотрим теперь эволюцию геометрических характеристик $\epsilon(\sigma t)$ и $K(\sigma t)$ ядра вихря при переходе через критическое значение сдвига. На рис. 5 представлены зависимости этих параметров от безразмерного времени σt при двух значениях параметра сдвига, один из которых по модулю меньше критического значения, а второй – больше.

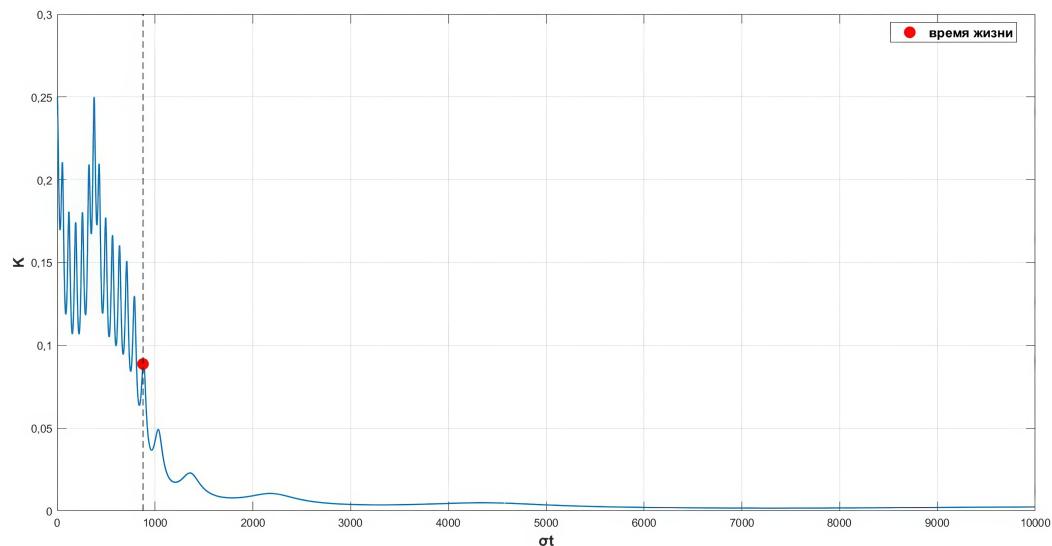


Рис. 2. Зависимость параметра сплюснутости от безразмерного времени $K(\sigma t)$ в зоне конечного времени жизни при начальных условиях (6). Абсцисса положения красного маркера отвечает времени жизни вихря.

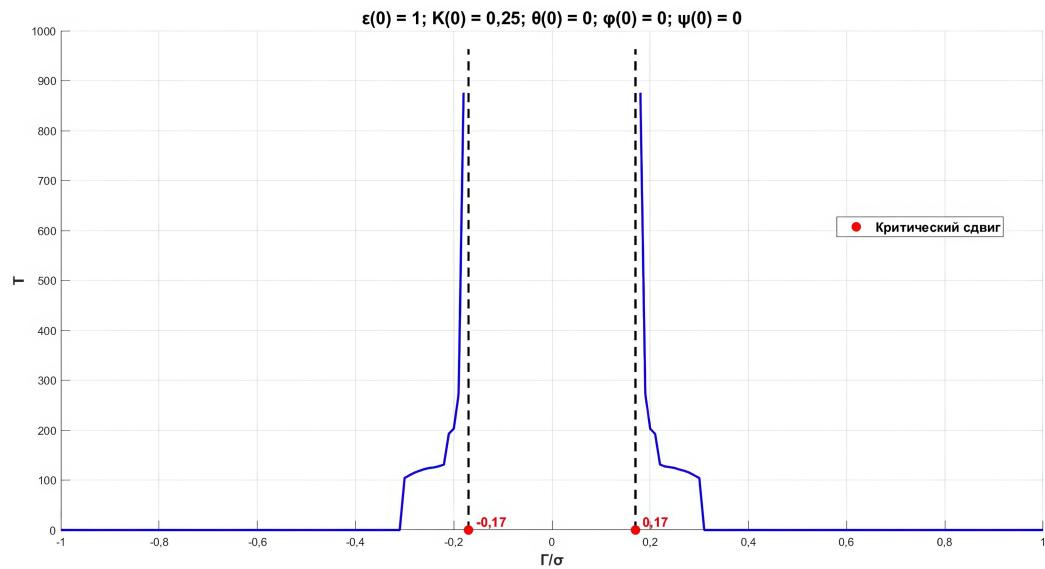


Рис. 3. Зависимость времени жизни вихря от величины безразмерного сдвига $T(\Gamma/\sigma)$ при начальных условиях (6). Красными маркерами отмечены значения критического сдвига. В срединной пустой зоне между вертикальными штриховыми линиями время жизни вихря стремится к бесконечности.

Как видим, при переходе через критическое значение безразмерного сдвига поведение вихря меняется качественно. При значениях сдвига, меньших критического, параметры $\varepsilon(\sigma t)$ и $K(\sigma t)$ осциллируют около некоторых значений. Их эволюция при этом описывает поведение пульсирующего вихря, изученного в [Чаплыгин, 1899]. При значениях сдвига, больших критического, ядро вихря со временем вытягивается в ленту: горизонтальная полуось, перпендикулярная фоновому течению, остаётся конечной, в то время как полуось вихря, ориентированная вдоль течения, бесконечно растёт. Вертикальная полуось схлопывается почти до нуля (рисунки 2 и 4). Такая вырожденная

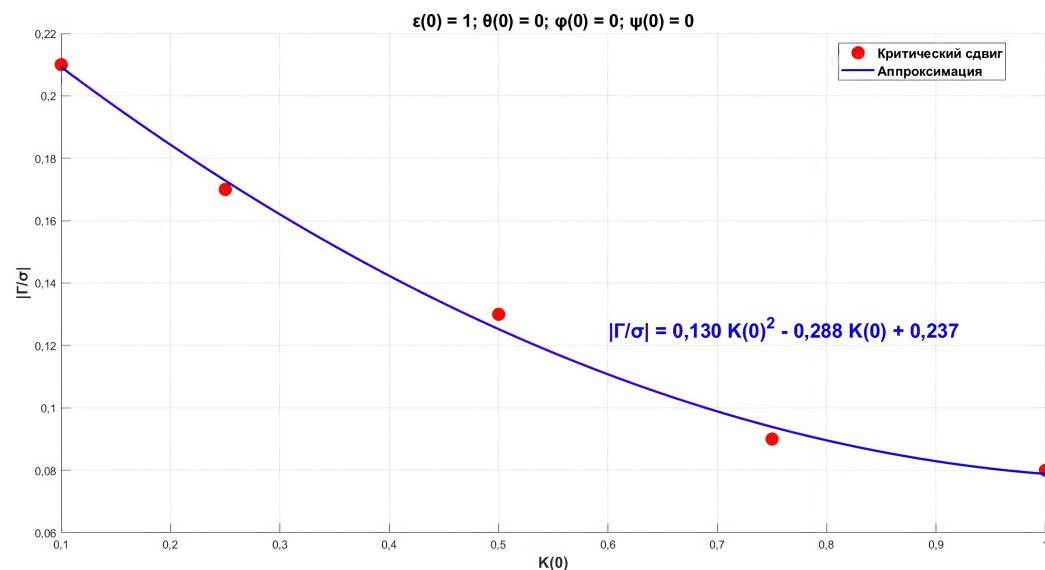


Рис. 4. Зависимость модуля критического значения сдвига $|\Gamma/\sigma|$ от начального параметра сплюснутости $K(0)$ при начальных параметрах $\varepsilon(0) = 1$, $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$. Красные маркеры отмечают точки, определенные в ходе численного моделирования. Синяя кривая изображает полученную аналитически аппроксимацию зависимости $|\Gamma/\sigma|(K(0))$.

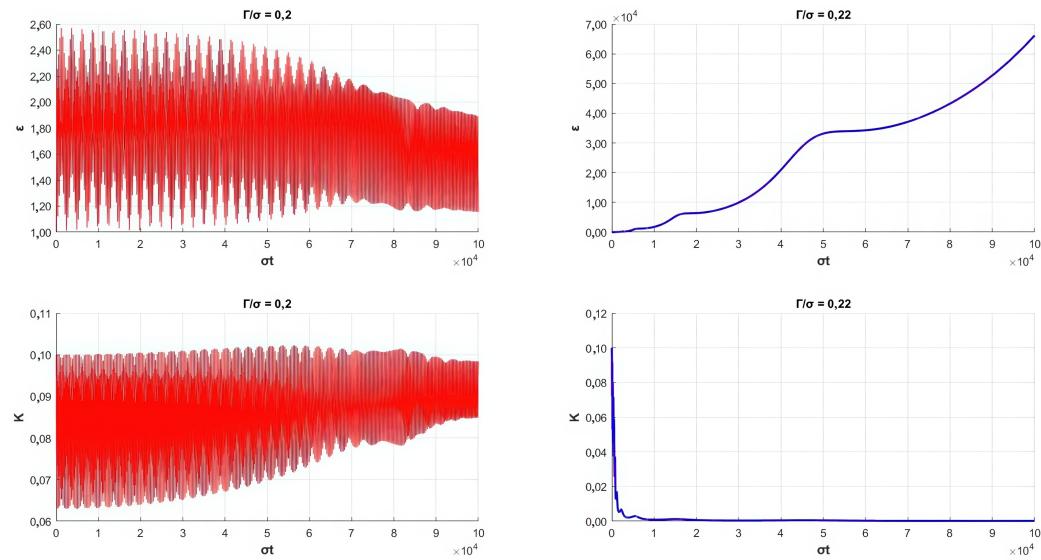


Рис. 5. Эволюция геометрических параметров вихря $\varepsilon(\sigma t)$ и $K(\sigma t)$ при значениях сдвига, меньшем критического (слева, красные кривые) и большем критического (справа, синие кривые) при следующих начальных параметрах: $\varepsilon(0) = 1$, $K(0) = 0,1$, $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$.

вихревая структура, вообще говоря, вихрём уже не является, а скорее напоминает тонкую вертикальную структуру океана [Монин и Озмидов, 1981].

Эволюция энергии вихря в бароклинном потоке

Выражение для энергии вихря с учётом принятых приближений запишем в виде:

$$E = \frac{1}{2} \int_V \left[\rho_o (u^2 + v^2) + \frac{g^2 \rho^2}{\rho_o N^2} \right] dV, \quad (7)$$

где ρ_o – средняя плотность среды, ρ – отклонение плотности от равновесного состояния. В (7) учитываются только горизонтальные компоненты скоростей u и v , индуцированные вихрём. Вертикальная компонента скорости из-за её малости в соотношении (7) не рассматривается. Произведение $\frac{g^2 \rho^2}{\rho_o N^2}$ представляет собой объёмную плотность доступной потенциальной энергии вихря, а $\rho_o (u^2 + v^2)$ – объёмная плотность кинетической энергии. Область интегрирования V в (7) в зависимости от постановки задачи может быть различной. Если интегрировать соотношение (7) по всему бесконечному объёму, то оно определяет полную механическую энергию вихря, которая включает энергию, заключённую в вихревом ядре, а также энергию индуцированного вихрём течения вне ядра. Если же в качестве объёма интегрирования V выбрать объём ядра вихря, то соотношение (7) покажет энергию, заключённую только внутри вихревого ядра.

Поведение собственной энергетики вихря в баротропном потоке исследовано в работах [Жмур и Арутюнян, 2023; Жмур и др., 2022]. После интегрирования по бесконечному объёму зависимость энергии вихря от его параметров выглядит следующим образом:

$$H = \frac{3}{40\pi} \rho_o \frac{V^2 \sigma^2}{\tilde{c}} K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{\left(m^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)m + 1\right) \left(K^2 + m\right)}},$$

где ρ_o – плотность жидкости, V – объём ядра вихря. В баротропном потоке меняется только параметр ε , в то время как параметр K остается постоянным. В бароклинном потоке, как уже было отмечено, меняются оба этих параметра. Следовательно, в отличие от баротропного потока, в бароклинном потоке эволюция энергии вихря будет зависеть

как от параметра ε , так и от параметра K . После тривиального преобразования получаем следующую зависимость

$$H(\varepsilon, K) = \text{const} K^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{\left(m^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)m + 1\right)\left(K^2 + m\right)}}.$$

Как видим, энергия вихря является функцией двух переменных. В рамках нашей задачи удобно рассматривать безразмерную энергию $E(\sigma t) = \frac{H}{\text{const}}$ как функцию от безразмерного времени σt :

$$E(\sigma t) = K^{\frac{1}{3}}(\sigma t) \int_0^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{\left(m^2 + \left(\varepsilon(\sigma t) + \frac{1}{\varepsilon(\sigma t)}\right)m + 1\right)\left(K^2(\sigma t) + m\right)}}. \quad (8)$$

Подставляя решение системы (5) с начальными условиями (6), получаем зависимость энергии от безразмерного времени (8). На [рис. 6](#) представлена эволюция энергии вихря в бароклинном потоке как результат численного исследования.

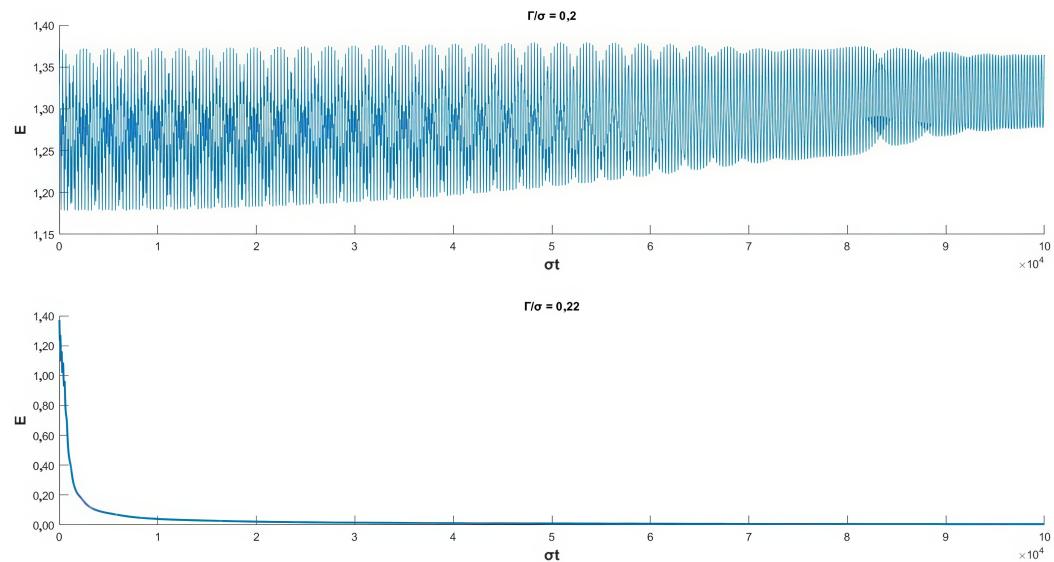


Рис. 6. Зависимости полной механической энергии ядра от безразмерного времени в следующих зонах: выживания ($\Gamma/\sigma = 0,09$), конечного времени жизни ($\Gamma/\sigma = 0,18$) и безграничного вытягивания ($\Gamma/\sigma = 0,39$) – сверху вниз, т.е. красная, синяя и фиолетовая линии – при начальных условиях (6).

Как видим, в колебательно-вращательной зоне энергия вихря колеблется около начального значения бесконечно долгое время. Это означает, что на слабых бароклинных течениях в среднем вихрь живёт без потери энергии. Из [рис. 6](#) также следует, что при вытягивании в потоке с вертикальным сдвигом энергия вихря после незначительных колебаний убывает до нуля, что практически совпадает с эволюцией энергии вихря при вытягивании в баротропном потоке.

Рассмотрим теперь механическую энергию, заключённую в ядре вихря с учётом его ориентации. Интегрирование в (7) будем производить по ограниченному эллипсоидальному объёму. В результате получим

$$T = \frac{1}{40} \rho \sigma^2 V a b K^2 \left[(r_{11}^2 + r_{12}^2) f + (r_{21}^2 + r_{22}^2) g + (r_{31}^2 + r_{32}^2) h \right],$$

$$\Pi = \frac{1}{40} \rho \sigma^2 V a b K^2 (r_{13}^2 f + r_{23}^2 g + r_{33}^2 h),$$

$$f = \varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)}} \right)^2,$$

$$g = \varepsilon^{-1} \left(\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right)^2,$$

$$h = K^2 \left(\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)^3}} \right)^2.$$

Здесь T – кинетическая энергия ядра, Π – доступная потенциальная энергия ядра, r_{ij} – соответствующий элемент матрицы поворота на углы Эйлера [Арутюнян и Жмур, 2025]. Полная механическая энергия ядра соответственно равна

$$E = T + \Pi.$$

Эволюция энергетики ядра в разных зонах поведения представлена на [рис. 6–9](#).

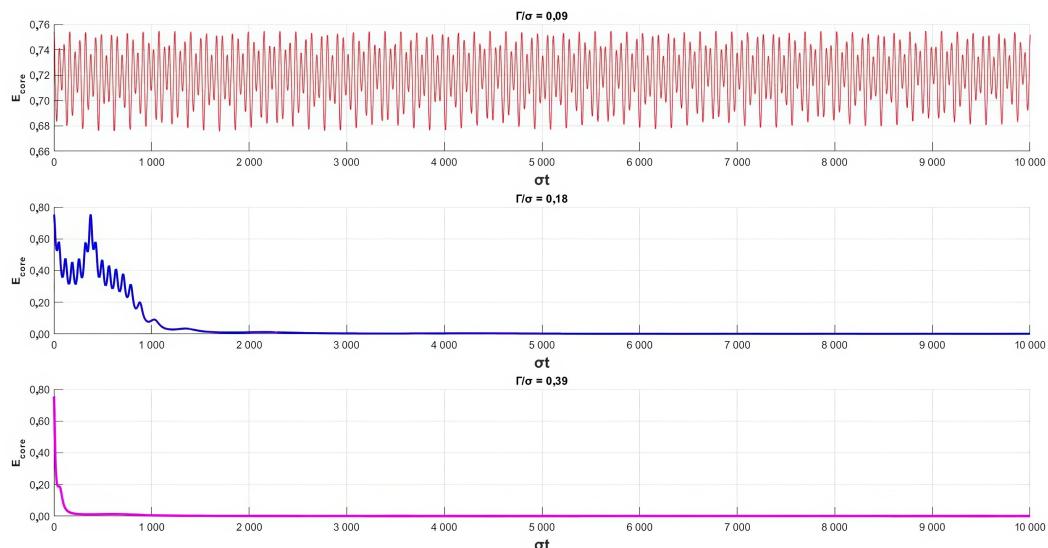


Рис. 7. Зависимости полной механической энергии ядра безразмерного времени в зонах выживания ($\Gamma/\sigma = 0,09$), конечного времени жизни ($\Gamma/\sigma = 0,18$) и безграничного вытягивания ($\Gamma/\sigma = 0,39$) – сверху вниз, т.е. красная, синяя и фиолетовая линии – при начальных условиях (6).

Как видим, при вытягивании убывает как полная механическая энергия ядра, так и его составляющие (кинетическая и доступная потенциальная энергии). Основная часть энергии запасена вне ядра вихря ([рис. 8](#)), что на первый взгляд является неожиданным результатом. Однако такой же результат впервые был получен в [Жмур и Арутюнян, 2023] для баротропного потока. Доля кинетической энергии с вытягиванием убывает до половины, в то время как доля доступной потенциальной энергии растёт ([рис. 9](#), [рис. 10](#)). Однако монотонность этих долей не всегда имеет место в силу зависимости от начальной ориентации ядра.

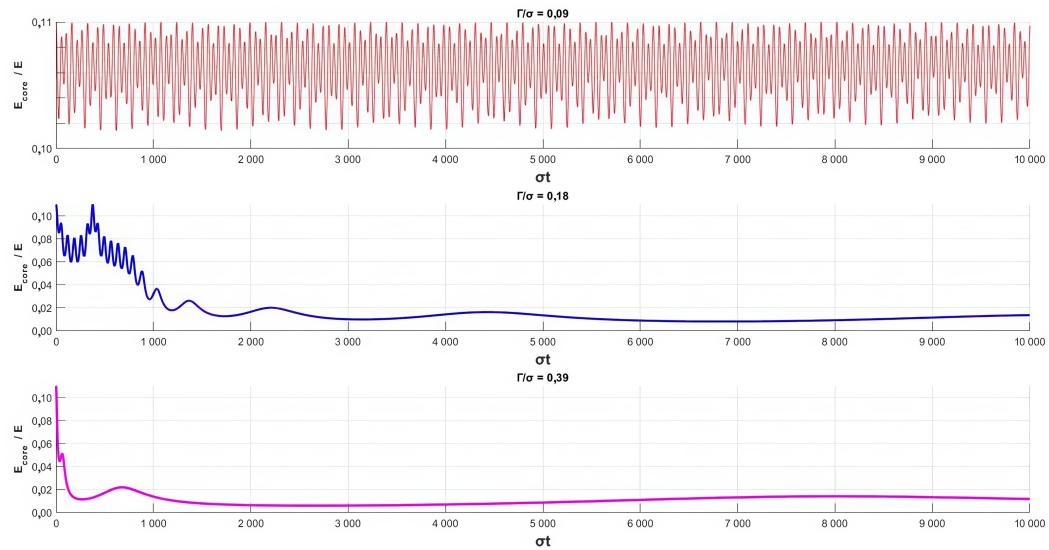


Рис. 8. Зависимости доли полной механической энергии ядра в полной механической энергии всего вихря от безразмерного времени в зонах выживания ($\Gamma/\sigma = 0,09$), конечного времени жизни ($\Gamma/\sigma = 0,18$) и безграничного вытягивания ($\Gamma/\sigma = 0,39$) – сверху вниз, т.е. красная, синяя и фиолетовая линии – при начальных условиях (6).

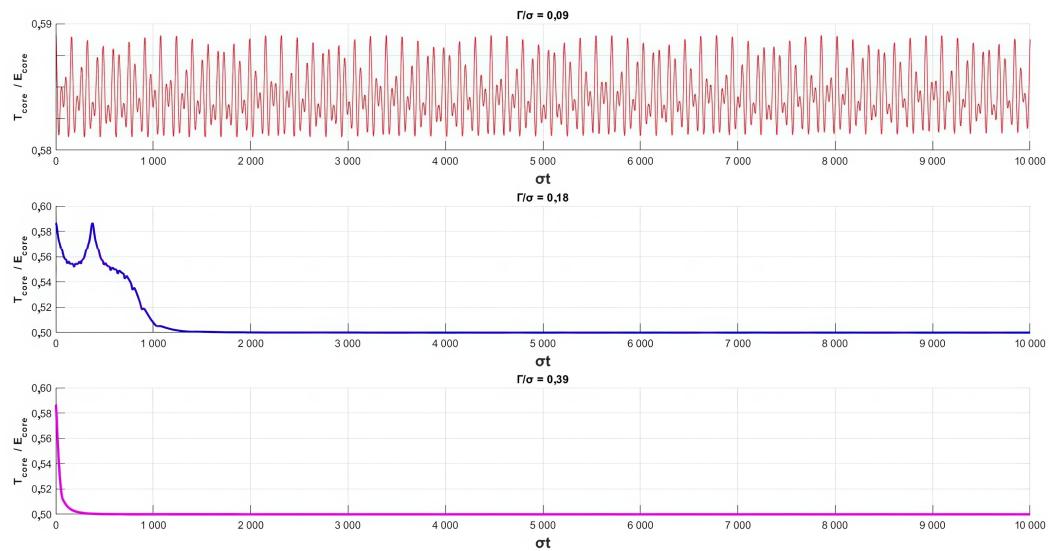


Рис. 9. Зависимости доли кинетической энергии в полной механической энергии ядра вихря от безразмерного времени в зонах выживания ($\Gamma/\sigma = 0,09$), конечного времени жизни ($\Gamma/\sigma = 0,18$) и безграничного вытягивания ($\Gamma/\sigma = 0,39$) – сверху вниз, т.е. красная, синяя и фиолетовая линии – при начальных условиях (6).

Эволюция числа Россби в бароклинном потоке

При анализе как мезомасштабных, так и субмезомасштабных, процессов существенную роль играет число Россби. Этот параметр появляется при приведении уравнений движения к безразмерной форме и отражает соотношение между инерционными силами и силой Кориолиса:

$$Ro = \frac{U}{fL},$$

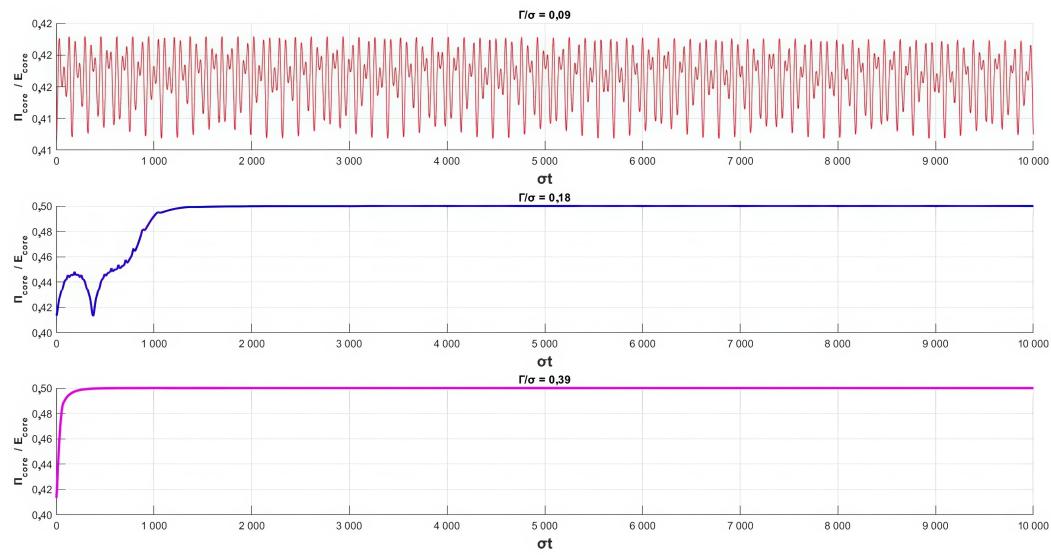


Рис. 10. Зависимости доли доступной потенциальной энергии в полной механической энергии ядра вихря от безразмерного времени в зонах выживания ($\Gamma/\sigma = 0,09$), конечного времени жизни ($\Gamma/\sigma = 0,18$) и безграничного вытягивания ($\Gamma/\sigma = 0,39$) – сверху вниз, т.е. красная, синяя и фиолетовая линии – при начальных условиях (6).

где U – характерная горизонтальная скорость, L – характерный горизонтальный размер, f – параметр Кориолиса. Число Россби можно также записать следующим образом

$$\text{Ro} = \frac{|\text{rot}_z \vec{u}|}{f}. \quad (9)$$

Мы будем пользоваться определением (9).

Ротор скорости внутри ядра (квазигоризонтальное движение) с учётом геострофики, решения (2) и ориентации ядра равен

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \vec{u} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{2} \left[(r_{11}^2 + r_{12}^2)h_1 + (r_{21}^2 + r_{22}^2)h_2 + (r_{31}^2 + r_{32}^2)h_3 \right], \\ h_1 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)}}, \\ h_2 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3(K^2 + m)}}, \\ h_3 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}}. \end{aligned}$$

Здесь как отмечалось выше, r_{ij} – соответствующий элемент матрицы поворота.

В бароклинном потоке с вертикальным сдвигом число Россби будет зависеть как от относительных параметров ядра, так и от его ориентации. Ниже представлена эволюция Числа Россби в трех зонах поведения.

В рамках квазигеострофического приближения нужно всегда следить за числом Россби: оно должно быть малым, в реальности, не превышая значения 0,3. Из [рис. 11](#) следует, что со временем условия применимости квазигеострофического подхода остаются справедливыми в силу того, что относительное значение числа Россби не превышает 1,02 в зоне выживания, а в зонах конечного времени жизни и вытягивания

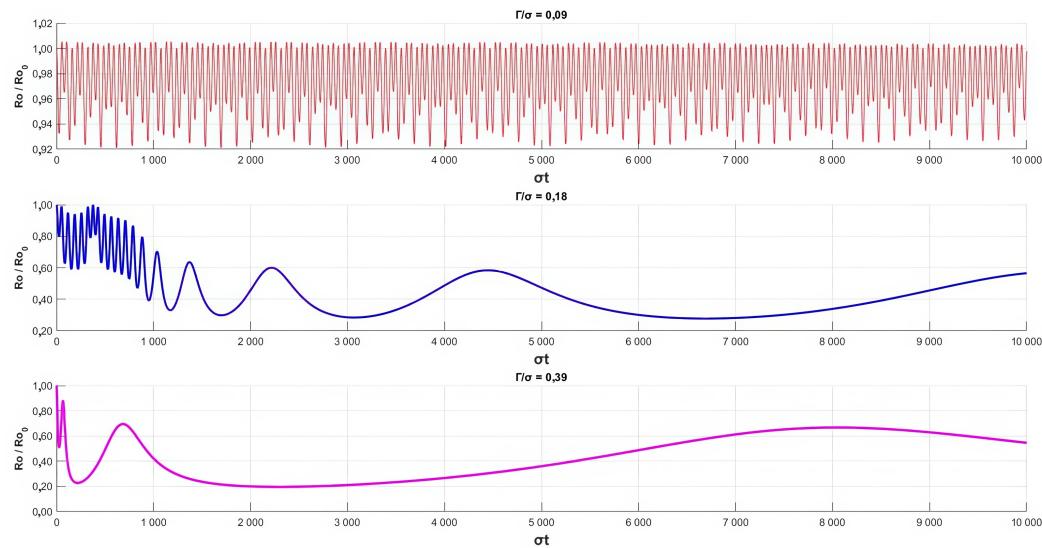


Рис. 11. Эволюция относительного числа Россби $\frac{\text{Ro}(\varepsilon, K, \varphi, \theta, \psi)}{\text{Ro}(\varepsilon_0, K_0, \varphi_0, \theta_0, \psi_0)}$ в зонах выживания ($\Gamma/\sigma = 0,09$), конечного времени жизни ($\Gamma/\sigma = 0,18$) и безграничного вытягивания ($\Gamma/\sigma = 0,39$) – сверху вниз, т.е. красная, синяя и фиолетовая линии – при начальных условиях (6).

вовсе меньше единицы. Другими словами, в зоне выживания число Россби колеблется в диапазоне от 0,9 до 1,0 от начального значения. В зоне конечного времени жизни после колебаний, связанных вращением вихря, вокруг уменьшающегося среднего, число Россби переходит в режим медленных колебаний в диапазоне 0,4–0,6 от первоначального значения числа Россби. В зоне неограниченного вытягивания режим медленных колебаний числа Россби наступает с самого начала и приводит к тем же результатам – колебаниям в диапазоне 0,4–0,6 от первоначального значения числа Россби. Таким образом, при воздействии горизонтального течения с вертикальным сдвигом на вихрь рост числа Россби в процессе эволюции вихря не наблюдается, в отличие от аналогичного воздействия баротропного течения на вихрь, где в процессе вытягивания вихря присутствует слабый рост числа Россби.

Выводы

Рассмотрена задача эволюции вихря во внешнем горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом для первоначально круглого в плане вихря.

Получена зависимость времени жизни вихря от безразмерного сдвига. Установлено, что время жизни вихря сильно зависит от сдвига внешнего течения. Получено критическое значение сдвига, при котором вихрь качественно меняет своё поведение: из колебательно-вращательного режима переходит в режим конечного времени жизни. Получена также зависимость критического сдвига от начального безразмерного параметра сплюснутости вихревого ядра.

Исследованы свойства эволюции полной механической энергии вихря в рассматриваемой задаче. Установлено, что с вытягиванием в бароклинном потоке энергия вихря, а также энергия его ядра квазимонотонно убывают до нуля. Как и в случае баротропных фоновых потоков, в течениях с вертикальным сдвигом также проявляется обратный энергетический каскад: энергия от вытягивающегося вихря передаётся внешнему течению.

Выявлено важное новое энергетическое свойство вихрей: большая часть энергии вихря запасена во внешней по отношению к ядру области. Это свойство проявляется при всех режимах эволюции вихря в фоновых течениях.

При вытягивании вихря число Россби Ro тоже меняется. Причём если в баротропных потоках вытягивание вихря сопровождается незначительным увеличением Ro , то аналогичное явление в бароклинном случае приводит к уменьшению числа Россби.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Института океанологии РАН им. П. П. Ширшова FMWE-2024-0016 (теоретическая часть работы и анализ результатов) и гранта РНФ №25-17-00021 (численное моделирование).

Список литературы

- Арутюнян Д. А. и Жмур В. В. Режимы поведения квазигеострофического эллипсоидального вихря на горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом // Океанология. — 2025. — Т. 65, № 4. — С. 14–34. — <https://doi.org/10.31857/S0030157425040024>. — EDN: XMHRAH.
- Жмур В. В. Мезомасштабные вихри в океане. — Москва : ГЕОС, 2011. — С. 290.
- Жмур В. В. и Арутюнян Д. А. Перераспределение энергии при горизонтальном вытягивании океанских вихрей баротропными течениями // Океанология. — 2023. — Т. 63, № 1. — С. 3–19. — <https://doi.org/10.31857/S0030157423010185>. — EDN: AFRQHI.
- Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В. и др. О вытягивании мезомасштабных вихрей в филаменты и распределении их на поверхности океана // Известия вузов. Радиофизика. — 2023а. — Т. 66, № 2/3. — С. 104–121. — https://doi.org/10.52452/00213462_2023_66_02_104.
- Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В. и др. Приложение к реальному океану теории трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // Океанология. — 2023б. — Т. 63, № 2. — С. 211–223. — <https://doi.org/10.31857/S0030157423020156>. — EDN: MAWHPW.
- Жмур В. В. и Панкратов К. К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. — 1989. — Т. 29, № 2. — С. 205–211.
- Жмур В. В., Травкин В. С., Белоненко Т. В. и др. Трансформация кинетической и потенциальной энергии при вытягивании мезомасштабного вихря // Морской гидрофизический журнал. — 2022. — Т. 38, 5 (227). — С. 466–480. — <https://doi.org/10.22449/0233-7584-2022-5-466-480>.
- Жмур В. В. и Щепеткин А. Ф. Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f -плоскости // Известия АН СССР. ФАО. — 1991. — Т. 27, № 5. — С. 492–503. — URL: <https://istina.ipmnet.ru/publications/article/394868173/>.
- Монин А. С. и Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. — Ленинград : Гидрометеоиздат, 1981. — С. 376. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_001036846/.
- Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. — 5-е. — Москва : Наука, 1977. — С. 736. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468275>.
- Чаплыгин С. А. О пульсирующем цилиндрическом вихре // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания / под ред. Н. Е. Жуковского и П. В. Преображенского. — Москва, 1899. — Т. 10, № 1. — С. 13–22. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_009791811/.
- Dritschel D. G., Reinaud J. N. and McKiver W. J. The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model // Journal of Fluid Mechanics. — 2004. — Vol. 505. — P. 201–223. — <https://doi.org/10.1017/S0022112004008377>.
- Kida S. Motion of an elliptic vortex in uniform shear flow // Journal of the Physical Society of Japan. — 1981. — Vol. 50, no. 10. — P. 3517–3520. — <https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3517>.
- Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik. — Leipzig : Taubner, 1876. — URL: <https://archive.org/details/vorlesungenberm02kircgoog/page/n18/mode/2up>.
- McKiver W. J. and Dritschel D. G. The motion of a fluid ellipsoid in a general linear background flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2003. — Vol. 474. — P. 147–173. — <https://doi.org/10.1017/S0022112002002859>.
- McKiver W. J. and Dritschel D. G. The stability of a quasi-geostrophic ellipsoidal vortex in a background shear flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 560. — P. 1–17. — <https://doi.org/10.1017/S0022112006000462>.
- McKiver W. J. and Dritschel D. G. Balanced solutions for an ellipsoidal vortex in a rotating stratified flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 802. — P. 333–358. — <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.462>.
- Meacham S. P., Pankratov K. K., Shchepetkin A. F., et al. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. — 1994. — Vol. 21, no. 2/3. — P. 167–212. — [https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6).
- Polvani L. M. and Flierl G. R. Generalized Kirchhoff vortices // Physics of Fluids. — 1986. — Vol. 29. — P. 2376–2379. — <https://doi.org/10.1063/1.865530>.

EVOLUTION OF HYDRODYNAMIC PARAMETERS OF AN ELLIPSOIDAL VORTEX IN A BAROCLINIC BACKGROUND FLOW

D. A. Harutyunyan^{1*}  and V. V. Zhmur^{1,2,3} 

¹Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

²Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences (IO RAS), Moscow, Russia

³Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

**Correspondence to: David Harutyunyan, arutyunyan.da@phystech.su

This study examines the behavior of a circular ellipsoidal ocean vortex in an external baroclinic flow with vertical shear. It is established that the vortex lifetime under fixed initial parameter conditions strongly depends on the external shear parameter. Depending on the vortex lifetime, the representative point in the parameter space may reside in one of three zones: (1) the survival zone, where the vortex lifetime tends to infinity, (2) the finite lifetime zone, and (3) the stretching zone, where the vortex lifetime approaches zero. At a certain shear velocity value, the infinite vortex lifetime becomes finite. This shear value, corresponding to the boundary between zones (1) and (2), is characterized as critical. The critical shear, in turn, depends on the initial geometric parameters of the vortex core. The work also investigates the vortex energy evolution. It is shown that during vortex stretching by the baroclinic flow, the total mechanical energy decreases both for the core and the entire vortex. Furthermore, the quasi-geostrophic balance remains valid for all three behavioral regimes.

Received: May 13, 2025

Accepted: July 15, 2025

Published: August 26, 2025

Keywords: ellipsoidal vortex, vortex lifetime, critical shear, vortex energy, Rossby number.



© 2025. The Authors.

Citation: Harutyunyan D. A. and Zhmur V. V. (2025), Evolution of Hydrodynamic Parameters of an Ellipsoidal Vortex in a Baroclinic Background Flow, *Russian Journal of Earth Sciences*, 25, ES5002, <https://doi.org/10.2205/2025ES001047>, EDN: FQGPCO

References

- Chaplygin S. A. On the Pulsating Cylindrical Vortex // Proceedings of the Department of Physical Sciences of the Society of Natural Science Lovers / под ред. N. E. Zhukovskogo и P. V. Preobrazhenskogo. — Moscow, 1899. — T. 10, № 1. — C. 13–22. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_009791811/.
- Harutyunyan D. A. и Zhmur V. V. Behavior modes of a quasi-geostrophic ellipsoidal vortex on a horizontal flow with vertical shear // Oceanology. — 2025. — T. 65, № 4. — C. 14–34. — <https://doi.org/10.31857/S0030157425040024>. — EDN: XMHRAH.
- Monin A. S. и Ozmidov R. V. Oceanic Turbulence. — Leningrad : Gidrometeoizdat, 1981. — C. 376. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_001036846/.
- Tikhonov A. N. и Samarskii A. A. Equations of Mathematical Physics. — 5th. — Moscow : Nauka, 1977. — C. 736. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468275>.
- Zhmur V. V. Mesoscale Vortices in the Ocean. — Moscow : GEOS, 2011. — C. 290.
- Zhmur V. V., Belonenko T. V., Novoselova E. V. и др. Application to the real ocean of the theory of transformation of a mesoscale vortex into a submesoscale vortex filament under stretching by an inhomogeneous barotropic flow // Oceanology. — 2023a. — T. 63, № 2. — C. 211–223. — <https://doi.org/10.31857/S0030157423020156>. — EDN: MAWHPW.
- Zhmur V. V., Belonenko T. V., Novoselova E. V. и др. On the stretching of mesoscale vortices into filaments and their distribution on the ocean surface // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2023b. — T. 66, № 2/3. — C. 104–121. — https://doi.org/10.52452/00213462_2023_66_02_104.
- Zhmur V. V. и Harutyunyan D. A. Redistribution of energy during horizontal stretching of ocean vortices by barotropic currents // Oceanology. — 2023. — T. 63, № 1. — C. 3–19. — <https://doi.org/10.31857/S0030157423010185>. — EDN: AFRQHI.

- Zhmur V. V. и Pankratov K. K. Dynamics of an ellipsoidal subsurface vortex in an inhomogeneous flow // Oceanology. — 1989. — Т. 29, № 2. — С. 205—211.
- Zhmur V. V. и Shchepetkin A. F. Evolution of an ellipsoidal vortex in a stratified ocean in the f-plane approximation // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 1991. — Т. 27, № 5. — С. 492—503. — URL: <https://istina.ipmnet.ru/publications/article/394868173/>.
- Zhmur V. V., Travkin V. S., Belonenko T. V. и др. Transformation of kinetic and potential energy during the stretching of a mesoscale vortex // Physical Oceanography. — 2022. — Т. 38, 5 (227). — С. 466—480. — <https://doi.org/10.22449/0233-7584-2022-5-466-480>.
- Dritschel D. G., Reinaud J. N. and McKiver W. J. The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model // Journal of Fluid Mechanics. — 2004. — Vol. 505. — P. 201—223. — <https://doi.org/10.1017/S0022112004008377>.
- Kida S. Motion of an elliptic vortex in uniform shear flow // Journal of the Physical Society of Japan. — 1981. — Vol. 50, no. 10. — P. 3517—3520. — <https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3517>.
- Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik. — Leipzig : Taubner, 1876. — URL: <https://archive.org/details/vorlesungenberm02kircgoog/page/n18/mode/2up>.
- McKiver W. J. and Dritschel D. G. The motion of a fluid ellipsoid in a general linear background flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2003. — Vol. 474. — P. 147—173. — <https://doi.org/10.1017/S0022112002002859>.
- McKiver W. J. and Dritschel D. G. The stability of a quasi-geostrophic ellipsoidal vortex in a background shear flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 560. — P. 1—17. — <https://doi.org/10.1017/S0022112006000462>.
- McKiver W. J. and Dritschel D. G. Balanced solutions for an ellipsoidal vortex in a rotating stratified flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 802. — P. 333—358. — <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.462>.
- Meacham S. P., Pankratov K. K., Shchepetkin A. F., et al. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. — 1994. — Vol. 21, no. 2/3. — P. 167—212. — [https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6).
- Polvani L. M. and Flierl G. R. Generalized Kirchhoff vortices // Physics of Fluids. — 1986. — Vol. 29. — P. 2376—2379. — <https://doi.org/10.1063/1.865530>.